Министерство образования Республики Беларусь
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

М.А.Маталыцкий, Т.В.Романюк

ÒÅÎÐÈß ÂÅÐÎßÒÍÎÑÒÅÉ
Â ÏÐÈÌÅÐÀÕ È ÇÀÄÀ×ÀÕ

Допущено Министерством образования
Республики Беларусь в качестве учебного пособия
для студентов математических специальностей
высших учебных заведений

Гродно 2002

УДК 519.2
ББК 22.171
М33

Рецензенты: профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики БГУ, доктор физико-математических наук Г.А.Медведев;
заведующий кафедрой математического анализа ГГУ им. Ф.Скорины, доктор физико-математических наук, профессор Ю.В.Малинковский.

Маталыцкий М.А.

М33 Теория вероятностей в примерах и задачах: Учеб. пособие / М.А.Маталыцкий, Т.В. Романюк. – Гродно: ГрГУ, 2002. – 248 с.

ISBN 985–417–371–2

В учебном пособии приведены теоретические сведения, решения около 70 различных типовых примеров и задач, более 600 задач для самостоятельного решения различной степени трудности. В конце каждого раздела помещены более сложные задачи, отмеченные звездочкой, которые носят исследовательский характер.

Для студентов математических специальностей университетов, а также научных и инженерных работников, которые интересуются теорией вероятностей и ее применениями.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 985–417– 371–2

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последнее десятилетие значительно увеличился объем преподавания теории вероятностей в высших учебных заведениях. В университетах для студентов математических специальностей, таких, как «математика», «прикладная математика», «экономическая кибернетика», «актуарная математика», «математическая экономика», «компьютерная математика», читается годовой или полуторагодовой курс теории вероятностей и математической статистики, появились новые курсы, связанные с вероятностью, для студентов физических и технических специальностей, изданы новые учебники.

Предлагаемый сборник задач является учебным пособием по курсу теории вероятностей для студентов математических специальностей университетов. Каждый из пятнадцати параграфов задачника имеет введение, где приводятся краткие сведения о понятиях и утверждениях теории вероятностей, необходимых для решения задач, приводятся примеры решения типовых задач. Некоторые важные теоремы приведены с полными или краткими доказательствами, которые могут быть использованы при доказательстве различных утверждений, сформулированных в задачах. В сборнике имеются задачи различных степеней трудности. В каждом параграфе есть простые задачи, которые сводятся к прямому применению основных формул и приемов. С другой стороны, в каждом параграфе есть достаточно сложные задачи, решения которых содержат важные идеи и связаны с аккуратным проведением математических выкладок, а также практическими применениями. Такие задачи отмечены звездочкой, они могут служить началом курсовой работы. В сборнике представлено значительное число задач «прикладного» характера, что позволяет не только обучить студента теоретическим основам, но и привить навыки вероятностно-статистического моделирования реальных явлений.

При составлении задачника был использован ряд отечественных и зарубежных учебников и задачников, приведенных в списке литературы. Некоторые из задач составлены авторами.

Выражаем благодарность рецензентам, сделавшим ряд полезных замечаний.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Определение. Возможные события, порождаемые комплексом условий, называются элементарными, если:

а) они различны (т.е. осуществление одного означает неосуществление любого другого);

б) после выполнения комплекса условия обязательно происходит одно из них.

Обозначим через $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ пространство элементарных событий.

Определение. Любое объединение элементарных событий называется случайным событием, $B \subseteq \Omega$.

Событие B осуществляется тогда, когда происходит одно из элементарных событий $\omega \in B$. В этом смысле пространство Ω может рассматриваться тоже как событие. Т.к. одно из элементарных событий происходит всегда, то и событие Ω происходит всегда, поэтому оно является достоверным событием. Событие, не содержащее ни одного элементарного события, является невозможным и обозначается $\varnothing$.

Таким образом, мы пришли к описанию случайных событий как множеств, получающихся объединением элементарных событий. В связи с этим для определения соотношений между случайными событиями в теории вероятностей принят язык теории множеств, который приобретает своеобразную вероятностную трактовку. Поясним некоторые из них при помощи таблицы 1.

Для анализа соотношений между случайными событиями могут оказаться полезными следующие соотношения.

1. $A \bigcup B = B \bigcup A, A \bigcap B = B \bigcap A$.

Эти равенства следуют из определений.

2. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

Доказательство следует из следующей цепочки импликаций:

$$\omega \in \overline{A \bigcup B} \Rightarrow \omega \notin A \bigcup B \Rightarrow \omega \notin A,$$

$$\omega \notin B \Rightarrow \omega \in \overline{A}, \omega \in \overline{B} \Rightarrow \omega \in \overline{A} \bigcap \overline{B}$$

и наоборот

Таблица 1

Язык теории множеств	Соотношения между событиями на языке теории множеств
$A = B \bigcup C$	Событие A (объединение событий B и C) происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий B или C.
$A = B \bigcap C =$ $= BC$	Событие A (пересечение событий B и C) происходит тогда и только тогда, когда происходят и событие B, и событие C.
$B \bigcap C = \varnothing$	События B и C являются несовместными. Если событие C происходит, то событие B не происходит.
$C \subseteq B$	Событие C влечет за собой событие B.
$A = \Omega \setminus B$, $\left(A = \overline{B}\right)$	Событие A является дополнительным (противоположным) по отношению к событию B. Событие A происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие B.

$$\omega \in \overline{A} \bigcap \overline{B} \Rightarrow \omega \notin A, \omega \notin B \Rightarrow \omega \notin A \bigcup B \Rightarrow \omega \in \overline{A \bigcup B}.$$

3. $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

4. $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Это следует из того, что если $\omega \in \overline{B}$, то $\omega \notin B$, поэтому $\omega \notin A$ и, значит, $\omega \in \overline{A}$.

Из соотношений 2 – 4 следует, что если задана некоторая конструкция из событий, ее дополнение можно выразить, заменив в ней все события на противоположные, символы объединения, пересечения и включения на символы пересечения, объединения и обратный к включению соответственно. Это свойство известно под названием закона де Моргана, например,

$$\overline{(A \bigcup B) \bigcap C} = \left(\overline{A} \bigcap \overline{B}\right) \bigcup \overline{C}.$$

Определение *(классическое определение вероятности)*. Пусть пространство элементарных событий состоит из конечного числа равновозможных элементарных событий $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,....,\omega_N\}$ и пусть случайное событие A состоит из n элементарных событий:

$$A=\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},...,\omega_{j_n}\},\ \omega_{j_i}\in\Omega,\ i=\overline{1,n}.$$

Тогда вероятностью события A называется число

$$P(A)=\frac{n}{N}\cdot$$

Данная формула называется формулой классической вероятности.

Пример 1.1. Монету бросают дважды. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

Решение. Пространством элементарных событий является множество $\Omega=\{\text{ГГ},\text{ГЦ},\text{ЦГ},\text{ЦЦ}\}$. Здесь, например, ГЦ означает, что при первом бросании появился герб, а при втором – цифра. Таким образом: $N=4$,

$$A=\{\text{ГГ},\text{ГЦ},\text{ЦГ}\}\Rightarrow n=3\Rightarrow P(\text{A})=\frac{3}{4}\cdot$$

Основной проблемой при решении задач, если использовать формулу классической вероятности, является подсчет числа способов, которыми могло произойти то или иное событие. В связи с этим такие задачи решаются, как правило, методами комбинаторики.

Часто используется следующее очевидное правило (основной принцип комбинаторики): если некий выбор A можно осуществить m различными способами, а некоторый другой выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B (A или B) можно осуществить $mn(m+n)$ способами.

При этом классическое определение вероятности можно дать другими словами.

Определение. Рассмотрим эксперимент, имеющий N одинаково возможных исходов (любой мыслимый результат эксперимента называется элементарным событием). Предположим, что событию A благоприятствует n из этих исходов (оно состоит из

n элементарных событий). Тогда справедлива формула классической вероятности.

При решении задач часто используют размещения, перестановки и сочетания. Если дано множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, то размещением (сочетанием) из n элементов по k называется любое упорядоченное (неупорядоченное) подмножество из k элементов множества n. При $k = n$ размещение называется перестановкой из n элементов.

Пусть, например, дано множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Размещениями из трех элементов этого множества по два являются $(\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_3), (\omega_2, \omega_1), (\omega_3, \omega_1), (\omega_3, \omega_2)$; сочетаниями: $(\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_3)$. Два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, а размещения отличаются либо самими элементами, либо порядком их следования.

Число сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{\mathrm{P}_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$ – число размещений из n элементов по k, а $\mathrm{P}_k = k!$ – число перестановок из k элементов. Справедливость соотношения $\acute{\mathrm{A}}_n^k = k!\mathrm{C}_n^k$ следует из того, что число всех k-элементных подмножеств множества Ω равно C_n^k и каждое такое подмножество можно упорядочить $k!$ способами.

Рассмотрим перестановки с повторениями. Пусть из элементов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i$ образуются конечные последовательности, содержащие n членов, в которых ω_1 повторяется k_1 раз, ω_2 – k_2 раза, …, $\omega_i - k_i$ раз, $k_1 + k_2 + ... + k_i = n$. Такие последовательности называются перестановками с повторениями. Две перестановки считаются одинаковыми, если они совпадают порядком расположения элементов, и считаются различными, если у них различный порядок расположения элементов. Число различных перестановок с повторениями равно

$$\mathrm{P}_n(k_1, k_2, ..., k_i) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_i!}.$$

Пример 1.2. Какова вероятность того, что из шести отмеченных чисел в карточке «Спортлото» (игра 6 из 49) k чисел будут выигрышными, $k = \overline{0, 6}$.

Решение. В данном примере эксперимент состоит в том, что случайным образом отмечаются 6 чисел из 49 в карточке «Спортлото». Поэтому равновозможными элементарными событиями будут наборы из шести отмеченных чисел. Т.к. для определения того, произойдет или не произойдет событие A – среди отмеченных чисел k чисел выигрышные, – порядок чисел не существенен, то в качестве равновозможных элементарных событий достаточно рассматривать неупорядоченные наборы 6 чисел из 49. Следовательно, число равновозможных элементарных событий равно C_{46}^6. Событие A состоит из наборов 6 чисел, k из которых выигрышные, а $6-k$ проигрышные. Набор из k выигрышных чисел можно выбрать C_6^k способами, а набор $6-k$ проигрышных чисел можно выбрать C_{43}^{6-k} способами. Тогда по основному принципу комбинаторики набор из k выигрышных и $6-k$ проигрышных чисел можно выбрать $\mathrm{C}_6^k\mathrm{C}_{43}^{6-k}$ способами, следовательно,

$$P(A) = \frac{\mathrm{C}_6^k\mathrm{C}_{43}^{6-k}}{\mathrm{C}_{49}^6}.$$

Например, для $k = 6$ имеем $P(A) \approx (14 \cdot 10^6)^{-1}$.

Задачи

1.1. Доказать равенства для случайных событий:

а) $\overline{\overline{A}\bigcap\overline{B}} = A\bigcup B$, б) $\overline{\overline{A}\bigcup\overline{A}} = \acute{A}\bigcap\hat{A}$.

1.2. Когда возможны равенства:

а) $\acute{A}\bigcup\hat{A} = \acute{A}$, б) $\acute{A}\bigcup\hat{A} = \overline{A}$, в) $\acute{A}\bigcup\hat{A} = \acute{A}\bigcap\hat{A}$,

г) $\acute{A}\bigcap\hat{A} = \acute{A}$, д) $\acute{A}\bigcap\hat{A} = \overline{A}$?

1.3. Упростить выражения:

а) $(A\bigcup B)\bigcap(B\bigcup C)$, б) $(A\bigcup B)\bigcap\left(A\bigcup\overline{B}\right)$,

в) $(A\bigcup B)\bigcap\left(A\bigcup\overline{B}\right)\bigcap\left(\overline{A}\bigcup B\right)$.

1.4. Доказать равенства:

а) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}\acute{A}_i} = \bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$, б) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}\acute{A}_i} = \bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

1.5. Из множества студентов, присутствующих на лекции по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A состоит в том, что выбранный студент закончил среднюю школу с медалью, B – победитель областной олимпиады, C – выпускник лицея. Описать события $\acute{A}\bigcap\overline{A}\bigcap C$, $A\setminus(A\bigcap B)$. При каком условии будет справедливо равенство $\acute{A}\bigcap\hat{A}\bigcap C = A$? Проверить справедливость соотношения $A\bigcap C\subseteq \mathrm{B}$.

1.6. Бросается игральный кубик. Найти вероятность того, что появившееся число очков кратно 3.

1.7. Игральный кубик бросается дважды. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит 4.

1.8. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных.

1.9. K человек случайным образом рассаживаются за круглым столом $(K>2)$. Найти вероятность того, что два фиксированных лица А и В окажутся рядом.

1.10. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

1.11. На десяти карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово «МАТЕМАТИКА».

1.12. Телефонный номер в г. Гродно – из шести цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

1.13. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в г. Гродно имеет все цифры различные?

1.14. В лифт двенадцатиэтажного дома на первом этаже вошли пять человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на одном и том же этаже; б) на восьмом этаже.

1.15. На полке в случайном порядке расставлено 20 книг, среди которых находится трехтомник Я. Купалы. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

1.16. Некоторые жители г.Гродно и других городов шестизначный номер троллейбусного или автобусного билета считают «счастливым», если сумма первых его трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить «счастливый» билет.

1.17. Рассмотрим множество F кусочно-линейных функций вида

$$f(0), f(x)=f(i)+\alpha_i(x-i), i\le x\le i+1, 0\le i\le n-1,$$

где α_i принимает значения 1 или –1. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранная функция из множества F принимает в точке n значение k ; б) наудачу выбранная функция из F имеет в полуинтервале $(0,n]$ i корней; в) для случайно выбранной функции $f\in F$

$$\int_0^n f(x)dx=0\,.$$

1.18. В партии, состоящей из N изделий, имеется k дефектных. В процессе приемного контроля из партии выбирается n изделий. Найти вероятность того, что из них ровно m изделий будут дефектными.

1.19. В ящике имеется K типовых элементов замены (ТЭЗ), из них K_1 элементов 1-го типа, …, K_i элементов i-го типа, …, K_n элементов n-го типа; $\sum_{i=1}^{n} K_i = K$. Из ящика выбирают наугад k ТЭЗ. Найти вероятность того, что среди них будет k_1 ТЭЗ 1-го типа, …, k_i ТЭЗ i-го типа, …, k_n ТЭЗ n-го типа.

1.20. За N перенумерованными ПЭВМ будут работать n студентов (один студент – за одной ПЭВМ). Каждый студент выбирает любую ПЭВМ случайно и с одинаковой вероятностью. Найти вероятность того, что для работы будут выбраны ПЭВМ с номерами $1, 2, ..., n$.

1.21. Для работы на N ПЭВМ случайным образом распределяются K студентов. Под состоянием совокупности из N ПЭВМ будем понимать вектор $k = (k_1, k_2, ..., k_N)$, где k_i – число студентов, которые выполняют свое задание на i-й ПЭВМ, $\sum_{i=1}^{N} k_i = K$. Состояния считаются различными, если им соответствуют вектора с различными компонентами. Найти: а) число состояний сети, б) вероятности состояний, предполагая, что все состояния равновозможные.

1.22. Пакет из десяти различных сообщений должен быть передан по электронной почте. Сообщения передаются одно за другим произвольным образом. Определить вероятность того, что сообщение A будет передано раньше, чем сообщение B.

1.23. Из 30 экзаменационных вопросов студент знает 20. Какова вероятность того, что он правильно ответит на два вопроса из двух?

1.24. По линии связи в случайном порядке передают 30 букв русского алфавита. Найти вероятность того, что на ленте появится последовательность букв, которые образуют слово «МИНСК».

1.25. По N каналам связи случайным образом передают K сообщений, $N > K$. Определить вероятность того, что на каждый канал припадет не более одного сообщения.

1.26. По N каналам связи, которые пронумерованы, случайным образом передаются K сообщений. Какова вероятность того, что по 1-му каналу будет передано k_1 сообщений, 2-му – $k_2, \ldots,$ N-му каналу – k_N сообщений, причем $\sum_{i=1}^{N} k_i = K$.

1.27. Используя условия задачи 1.25, найти вероятность того, что среди N каналов n_0 таких, по которым не будет передано ни одного сообщения, n_1 таких, по которых будет передано только одно сообщение, …, n_K таких, по которых будет передано K сообщений;

$$\sum_{i=0}^{K} n_i = N, \quad \sum_{i=1}^{K} i n_i = K .$$

1.28. Принимаются кодовые комбинации, в которые входят десять цифр от 0 до 9, при этом цифры не повторяются. Какова вероятность того, что в принятой комбинации цифры образуют последовательность 9876…210?

1.29. В N ячейках случайно размещены n частиц. Чему равна вероятность того, что в i-ю ячейку попало n_i частиц?

1.30. Газ, состоящий из K молекул, находится в замкнутом сосуде. Мысленно разделим сосуд на K равных клеток и будем считать, что вероятность для каждой молекулы попасть в любую из клеток одна и та же. Какова вероятность того, что молекулы распределятся так, что в 1-й клетке будет n_1 молекул, во 2-й – n_2 молекул, …, в K-й – n_K молекул?

1.31. Из колоды карт (52 карты) наугад вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

1.32. Из колоды карт (52 карты) наугад вынимают 6 карт. Определить вероятность того, что среди этих карт: а) будет дама пик; б) будут карты всех мастей.

1.33. Полная колода карт (52 карты) делится пополам. Найти вероятность того, что: а) число черных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым (по 13), б) в каждой половине будет по два туза.

1.34. Из колоды в 36 карт наугад выбираются 4. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

1.35. Из колоды в 36 карт берется наугад 10 карт. Найти вероятность того, что среди них будут 8 одномастных.

1.36. Найти вероятность того, что в группе из 25 студентов найдутся по меньшей мере два, которые имеют общий день рождения.

1.37. Подойдя к двери, человек, у которого n ключей, по причинам, о которых можно только догадываться, начинает последовательно подбирать ключи. Какова вероятность того, что дверь откроется с k-го раза, если известно, что только один из ключей подходит к замку, а опробованный и не подошедший ключ откладывается.

1.38. На Древней Руси существовало следующее гадание. Девушка держала в руке шесть травинок так, чтобы они торчали сверху и снизу. Ее подруга попарно связывала травинки сверху и снизу. Если при этом все травинки образовывали кольца, то это означало, что девушка в текущем году выйдет замуж. Какова вероятность того, что все шесть травинок образуют кольца?

1.39. *(Задача Стефана Банаха).* Некоторый математик носит при себе два коробка спичек. Каждый раз, когда ему нужна спичка, он выбирает наугад один из коробков. Найти вероятность того, что когда математик впервые вынимает пустой коробок, то в другом коробке останется r спичек, $r = 0, 1, \ldots, n$ где n – число спичек, которое было первоначально в каждом коробке.

1.40. В очереди, где продаются билеты по \$ 5, стоят n человек. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придется ждать сдачи, если перед началом продажи денег у кассира не было, а получение платы за каждый билет равновозможно как 5-и, так и 10-долларовыми купюрами?

1.41. Решить задачу 1.40 при условии, что перед продажей билетов у кассира было $2n$ 5-долларовых купюр.

1.42. В лотерее 100 билетов, среди них один выигрыш в \$ 50, 3 выигрыша по \$ 25, 6 выигрышей по \$ 10 и 15 – по \$ 3. Найти вероятность какого-нибудь выигрыша при покупке трех лотерейных билетов. Что вероятнее: выиграть не менее $ 25 или не более $ 25 при покупке одного лотерейного билета?

1.43. В лотерее K билетов, из них m выигрышных. Найти вероятность одного выигрыша для лица, имеющего k билетов.

1.44. Из разрезной азбуки составляют слово «ЭКОНОМИКА». Затем все буквы этого слова перемешиваются и снова вкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «ЭКОНОМИКА».

1.45. Пусть эксперимент состоит в проведении голосования по стратегии развития компании собранием из K членов. Каждый сотрудник может голосовать «за», «против» или воздержаться от голосования. Найти число элементарных событий в Ω, если голосование является: а) открытым, б) тайным. Если в процессе обсуждения сотрудники могут менять свое мнение, то сколько элементов содержит Ω, если голосование проводится дважды (двумя способами)?

1.46*. Три письма случайно раскладываются по трем конвертам с адресами. Найти вероятность, что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт.

1.47*. Показать, что из чисел $1, 2, ..., N$ можно составить N^n, $n < N$, различных последовательностей $\omega = (i_1, i_2, ..., i_n)$, из которых $N(N-1) \cdot ... \cdot (N-n+1)$ последовательностей состоят из различных чисел: $i_k \neq i_m$ при $k \neq m$.

1.48*. См. условие задачи 1.37. Требуется найти вероятность того, что замок откроется на k-м испытании, если опробованный и не подошедший ключ возвращается к остальным ключам.

1.49*. Пусть n человек выстраиваются случайным образом в очередь. Какова вероятность, что между X и Y будут стоять ровно r человек.

1.50*. Установить тождество $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, разбивая все сочетания из n элементов по k на содержащие и не содержащие некоторый фиксированный элемент.

1.51*. Показать, что имеется C_n^k строчек $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ из 0 и 1, содержащих равно k единиц. Вывести отсюда тождество

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n.$$

1.52*. (*Генуэзская лотерея*). Из общего числа 90 номеров разыгрываются 5 номеров. Можно заранее сделать ставку на любое число номеров в пределах пяти. Если ставка сделана на $k, k = 1, 2, 3, 4, 5$, номеров и именно эти k номеров находятся среди номеров, вышедших в тираж, то соответствующие выигрыши таковы:

$$\begin{array}{rl} \text{если } k = 1, & \text{то 15 ставок,} \\ k = 2, & \text{то 270 ставок,} \\ k = 3, & \text{то 5500 ставок,} \\ k = 4, & \text{то 75000 ставок,} \\ k = 5, & \text{то 1000000 ставок.} \end{array}$$

Найти вероятности выигрышей при ставке на любое число номеров.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Геометрическая вероятность является расширением понятия классической вероятности на случай несчетного множества элементарных событий. В случае, когда Ω – несчетное множество, вероятность определяется не на элементарных событиях, а на их множествах.

Пусть равновозможные элементарные события ω являются точками Ω – ограниченного множества n-мерного евклидова пространства, имеющего меру Лебега $\mu(\Omega)$. Рассмотрим систему $\mathcal{A}$ измеримых по Лебегу подмножеств Ω. Для любого случайного события $A \in \mathcal{A}$ его вероятностью назовем число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(A)$ – мера Лебега – действительная, неотрицательная, счетно-аддитивная функция множеств, т.е. такая, что а) $\mu(A) \geq 0$, б) $\mu(\varnothing) = 0$, в) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, г) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (в частных случаях – это длина, площадь, объем). Это определение называют геометрическим определением вероятности.

Пример 2.1. На одной стороне ленты магнитофонной кассеты длиной 10 м записан гимн студентов-математиков Беларуси длиной 2 м, а на другой – 14-я соната Бетховена длиной 3 м, причем их местоположение неизвестно. Случайным образом с обеих сторон ленты был поврежден (стерт) участок длиной 1 м, начинающийся на расстоянии 5 м от начала ленты. Найти вероятности следующих событий: A =«гимн и соната не повреждены», B =«гимн поврежден, а соната – нет», C =«соната повреждена, а гимн – нет», D =«и гимн и соната повреждены».

Решение. Из того, что положение гимна и сонаты совершенно неизвестно, делаем предположение, что любое положение начала каждого из них, при котором они вмещаются на соответствующих сторонах ленты, столь же правдоподобно, как любое другое. Пусть x – абсцисса начала записи гимна, y – сонаты. Пространство элементарных событий

$$\grave{U} = \{(x, y): 0 \le x \le 10-2,\ 0 \le y \le 10-3\} -$$

прямоугольник с площадью $\mu(\Omega) = 8 \times 7 = 56$ м^2. На рис. 2.1 разными видами штриховки отмечены области, соответствующие повреждению гимна и сонаты, буквами A, B, C, D – области, соответствующие каждому из событий A, B, C, D. Используя геометрическое определение вероятности, можно легко найти вероятности этих событий, например,

$$P(D) = \frac{\grave{\imath}(D)}{\grave{\imath}(\grave{U})} = \frac{3 \cdot 4}{56} = \frac{3}{14}.$$

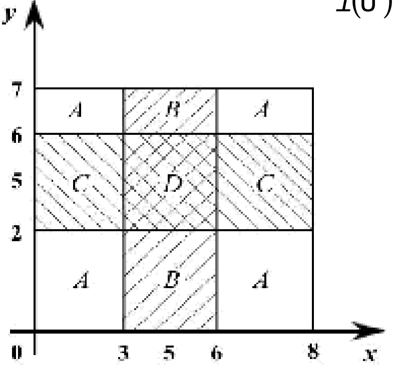

Рис. 2.1

До сих пор мы рассматривали случаи, когда мера множества Ω была ограниченной и все элементарные события равновозможны. Рассмотрим теперь определение вероятности, свободное от этих ограничений. При этом в основу полагается идея определения вероятности как неотрицательной, нормированной и счетно-аддитивной функции множеств, являющихся событиями, т.е. $P(A)$, где $A \subseteq \Omega$. Совокупность подмножеств из Ω, на которых может быть определена вероятностная функция, должна быть построена специальным образом.

События, имеющие вероятность, образуют σ-алгебру, т.е. множество F подмножеств Ω, удовлетворяющее следующим свойствам:

$$\text{а) } \grave{U} \in \mathsf{F}\ ; \quad \text{б) } A \in \mathsf{F} \Rightarrow \overline{A} = \grave{U} \setminus A \in \mathsf{F}\ ;$$

$$\text{в) } A_k \in \mathsf{F},\ k = 1,2,\ldots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathsf{F} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}k \in \mathsf{F} \right).$$

Простейшими примерами σ-алгебр являются: тривиальная σ-алгебра F, состоящая из двух событий $(\Omega, \varnothing)$, где $\varnothing$ – невозможное событие; σ-алгебра F, состоящая из всех событий.

Пример 2.2. Пусть

$$\grave{U} = \{\grave{u} : \grave{u} \in [0,1]\},\ \acute{A} = \left\{\grave{u} : \grave{u} \in \left[0, \frac{2}{3}\right]\right\}, \hat{A} = \left\{\grave{u} : \grave{u} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]\right\}.$$

Описать σ-алгебру событий F на $\grave{U}$, порожденную событиями A и B.

Решение. Используя определение σ-алгебры, получаем, что σ-алгебру событий F образуют следующие события (т.к. здесь $\acute{A} \cup \hat{A} = \grave{U}$, $\overline{A} \cap \overline{\hat{A}} = \varnothing$):

$$\varnothing,\ \grave{U} = \{\grave{u} : \grave{u} \in [0,1]\}, \acute{A} = \left\{\grave{u} : \grave{u} \in \left[0, \frac{2}{3}\right]\right\}, \hat{A} = \left\{\grave{u} : \grave{u} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]\right\},$$

$$\overline{A} = \left\{\grave{u} : \grave{u} \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]\right\},\ \overline{\hat{A}} = \left\{\grave{u} : \grave{u} \in \left[0, \frac{1}{3}\right)\right\},\ \acute{A} \cap \hat{A} = \left\{\grave{u} : \grave{u} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right\},$$

$$\overline{A} \cup \overline{\hat{A}} = \left\{\grave{u} : \grave{u} \in \left\{\left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right]\right\}\right\}.$$

Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностью P, определенной на σ-алгебре событий $\mathcal{F}$, называется числовая функция $P(A)$, $A \in \mathcal{F}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $\forall A \in \mathcal{F}$ $P(A) \geq 0$.

2. $P(\Omega) = 1$.

3. $A_i \bigcap A_k = \varnothing$, $i \neq k \Rightarrow P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

Из данного определения следует, что $0 \leq P(A) \leq 1$, и вероятность является нормированной мерой, т.е. мерой, для которой выполняется условие нормировки 2.

Определение. Совокупность $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством.

Эквивалентным аксиоме 3 является требование аддитивности для конечного множества событий A_k и следующие аксиомы непрерывности (та или иная):

а) пусть случайные события $B_1, B_2, ..., B_n, ... \in \mathcal{F}$ таковы, что

$$B_{k+1} \subset B_k,\ \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B,\ \text{тогда}\ \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B);$$

б) пусть $B_1, B_2, ..., B_n, ... \in \mathcal{F}$ и $B_k \subset B_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = B$, тогда также $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = P(B)$.

Можно показать, что из аксиомы (3) при выполнении вышеуказанного условия следует аксиома непрерывности б) и наоборот. Пусть, например, справедлива аксиома непрерывности б). Предположим, что $A_k \in \mathcal{F}$, $k = 1,2,...,n,...$ и $A_k \bigcap A_j = \varnothing$, $k \neq j$. Определим $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$; ясно, что $B_n \subseteq B_{n+1}$. Определим также

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Из аксиомы непрерывности б) следует, что

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_n),$$

откуда вытекает аксиома 3.

Приведем свойства вероятности:

а) $P(\varnothing) = 0$, следует из того, что $\varnothing \cup \grave{U} = \grave{U}$
и $P(\varnothing \cup \grave{U}) = P(\varnothing) + P(\grave{U})$;

б) $P(\overline{\acute{A}}) = 1 - P(\acute{A})$, поскольку $\acute{A} \cup \overline{\acute{A}} = \grave{U}$
и $P(\acute{A} \cup \overline{\acute{A}}) = P(\acute{A}) + P(\overline{\acute{A}}) = P(\grave{U}) = 1$;

в) если $\acute{A} \subseteq \hat{A}$, то $P(\acute{A}) \le P(B)$, следует из определения меры;

г) $P(\acute{A} \cup \hat{A}) = P(\acute{A}) + P(\hat{A}) - P(\acute{A} \cap B)$, поскольку
$\acute{A} \cup \hat{A} = \acute{A} \cup (\hat{A} \setminus (\acute{A} \cap \hat{A}))$;

д) $P(\acute{A} \cup \hat{A}) \le P(\acute{A}) + P(\hat{A})$, следует из предыдущего свойства; равенство будет, если $\acute{A} \cap \hat{A} = \varnothing$.

Задачи

2.1. Два студента имеют одинаковую вероятность прийти к указанному месту в любой момент промежутка времени T. Определить вероятность того, что время ожидания одним другого будет не больше t.

2.2. По маршруту независимо друг от друга ходят два автобуса: № 20 – через 10 минут, № 15 – через 7 минут. Студент приходит на остановку в случайный момент времени. Какова вероятность, что ему придется ждать автобуса менее трех минут.

2.3. Дано уравнение $x^2+ax+b=0$. Известно, что $0\le a\le 1$, $0\le b\le 1$, причем вероятность попадания каждого из чисел a и b в какой-либо интервал отрезка $[0,1]$ пропорциональна длине интервала и не зависит от его положения относительно отрезка $[0,1]$. Найти вероятность того, что данное уравнение имеет действительные корни.

2.4. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных правильных дробей не больше 1, а их произведение не больше $\dfrac{3}{16}$.

2.5. Два студента договорились встретиться в определенном месте между 19 и 20 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 5 минут. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода в промежутке от 19 до 20 часов.

2.6. На паркетный пол случайным образом падает монета диаметром d. Размеры паркетных плиток $a\times b$, причем $d<a<b$. Какова вероятность того, что упавшая монета не пересечет границы паркетной плитки?

2.7. На отрезке $[0,1]$ случайным образом выбираются две точки, Какова вероятность того, что из отрезков, полученных разбиением отрезка $[0,1]$ этими точками, можно построить треугольник?

2.8. На бесконечную шахматную доску, сторона каждой клетки равна $2a$, бросают монету радиуса $r<a$. Найти вероятность того, что монета попадает внутрь одной клетки целиком.

2.9. *(Задача Бюффона).* На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2L$, бросается игла длиной $2l$, $l\le L$. Найти вероятность того, что игла пересечет прямую.

2.10. Два танкера должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих танкеров равновозможно в течение одних суток. Найти вероятность, что одному из танкеров придется ждать освобождения причала, если время разгрузки первого танкера – три часа, а второго – четыре часа.

2.11. Два судна плывут в тумане: одно идет вдоль пролива шириной L, а другое курсирует без остановок поперек этого пролива. Скорости движения судов соответственно равны v_1 и v_2.

Второе судно подает звуковые сигналы, которые слышны на расстоянии $l < L$. Определить вероятность того, что на первом судне услышат сигналы, если пересечение курсов судов равновозможно в любом месте пролива.

2.12. Катер перевозит груз с одного берега на другой, пересекая пролив за один час. Какова вероятность того, что судно, которое движется вдоль пролива, будет замечено, если с катера замечают судно в случае пересечения его курса не раньше, чем за 20 мин до пересечения с курсом катера, и не позже, чем через 20 мин после пересечения судном курса катера? Любой момент и любое место пересечения судном курса катера равновозможны. Курс судна перпендикулярен курсу катера.

2.13. В квадрате с вершинами (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) наугад выбирают точку M, пусть (ξ,η) – ее координаты. Будем считать, что вероятность попадания в область, которая лежит в квадрате, зависит только от площади этой области и пропорциональна ей. Доказать, что для $0 \le x, y \le 1$

$$P\{\xi \le x,\ \eta \le y\} = P\{\xi \le x\}P\{\eta \le y\} = xy.$$

2.14. В условиях задачи 2.13 для $0 < z < 1$ найти:

а) $P\{\ |\xi-\eta| \le z\ \}$; б) $P\{\ \xi\eta \le z\ \}$; в) $P\left\{\dfrac{\xi+\eta}{2} \le z\right\}$;

г) $P\{\min(\xi,\eta) \le z\}$; д) $P\{\max(\xi,\eta) \le z\}$.

2.15. В круге радиуса R наудачу выбирают точку. Вероятность попадания точки в некоторую область круга пропорциональна площади этой области. Определить вероятность того, что: а) точка находится от центра на расстоянии меньшем чем r, $r < R$; б) меньший угол между заданным направлением и прямой, которая соединяет точку с началом координат, будет не больше, чем α.

2.16. На окружности с радиусом 1 и центром в начале координат наудачу выбирают точку. Вероятность выбора точки на некоторой дуге окружности зависит только от длины этой дуги и пропорциональна ей. Найти вероятность того, что: а) проекция точки на диаметр находится от центра на расстоянии не больше, чем r, $r<1$; б) расстояние от выбранной точки до точки с координатами (1,0) не больше, чем r.

2.17. Спутник Земли двигается по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты. Найти вероятность того, что спутник упадет выше 30° северной широты, если считать равновозможным падение спутника в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями.

2.18. Слой воздуха толщиной H задерживает пылинки радиусом r в количестве λ штук в одной кубической единице. Найти вероятность того, что луч света, перпендикулярный слою, не пересечет ни одной пылинки.

2.19. Электрон вылетает из случайной точки нити накаливания и движется перпендикулярно ей. С какой вероятностью он свободно пройдет через сетку, которая окружает нить и имеет вид винтовой линии с радиусом R, толщиной σ и шагом H?

2.20. Рассмотрим частицу с энергией $E=\dfrac{mv^2}{2}$, которая движется в случайном направлении. Пусть (v_1, v_2, v_3) – вектор скорости частицы в некоторой системы координат. Какова вероятность того, что $\alpha \le v_1 \le \beta$?

2.21. На круглом экране радиолокатора радиусом r имеется точечное отображение объекта, которое занимает случайное положение в границах экрана, причем ни одна зона в границах не имеет преимущества перед другой. Найти вероятность того, что расстояние от точки объекта до центра экрана будет меньше, чем $\dfrac{r}{2}$.

2.22. По радиолокатору в течение промежутка времени $(0, T)$ передаются два сигнала длительностью $\tau < T$ и каждый с одинаковой возможностью начинается в любой момент интервала $(0, T-\tau)$. Когда сигналы перекрывают друг друга хотя бы частично, они оба искажаются и приняты быть не могут. Найти вероятность того, что сигналы будут приняты.

2.23. Самолет с радиолокационной станцией, дальность действия которой L, в районе площадью s осуществляет поиск подводной лодки со скоростью v. Лодка может всплыть в любой точке района на время t. Найти вероятность обнаружения подводной лодки радиолокатором, если время t невелико.

2.24. Имеются две параллельные линии связи длиной l, расстояния между которыми $d < l$. Известно, что на каждой линии где-то есть разрыв, но неизвестно, в каком месте. Найти вероятность того, что расстояние r между точками разрыва не больше, чем a, $\left(d < a < \sqrt{l^2 + d^2}\right)$.

2.25. Панорамный приемник периодически с постоянной скоростью проходит полный диапазон частот (f_1, f_2), где возможно появление сигнала, за которым установлено наблюдение. Полоса пропускания приемника определяется допустимой расстройкой относительно сигнала $\pm\Delta f$. Считая сигнал импульсным (выявленной точкой как на оси времени, так и на оси частот), появление его равновозможным в любой момент и в любой точке интервала $(f_1 - \Delta f, f_2 + \Delta)$, найти вероятность обнаружения сигнала.

2.26. Используя условие задачи 2.25, найти вероятность пеленга передатчика, если известна частота сигнала и то, что антенна пеленгатора вращается равномерно с углом раскрытия диафрагмы антенны $\alpha = 20^\circ$.

2.27. Поезда метро идут в данном направлении с интервалом 2 мин. Какова вероятность того, что пассажиру доведется ждать поезда не больше, чем 30 с?

2.28. Концентрация доходов различных социальных групп изображается кривой Лоренца. Пусть наудачу выбираются социальные слои, суммарная доля x которых от всего населения изменяется в интервале $0 \le x \le 1$, а суммарный относительный доход y изменяется соответственно в интервале $0 \le y \le x$. Найти вероятность события, состоящего в том, что наудачу выбранная часть населения будет иметь относительный доход, удовлетворяющий соотношению $x^2 \le y \le x$.

2.29. Состояние работы банка за сутки характеризуется суммарной величиной d_1 вкладов от индивидуальных вкладчиков и не зависящей от нее величиной d_2 вкладов от фирм. Работа банка оценивается его правлением успешно, если $d_1 + d_2 > 0$ и выполняется пропорция вкладов: $d_1 + d_2 > d$, где $d > 0$ – заданный коэффициент. Предполагая равновероятность значений $d_i \in \left[\underline{d}_i, \overline{d}_i\right]$, $i = 1,2$, вычислить вероятность того, что итоги работы банка в течение суток успешны.

2.30. Пусть

$$\text{Ù} = \{\omega : \omega \in [0,1]\},\ \text{Á} = \left\{\omega : \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\},\ \text{Â} = \left\{\omega : \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\},$$

$$C = \left\{\omega \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right\},\ D = \{\omega : \omega \in G\},$$

где G – множество всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Описать σ-алгебру событий F на Ù, порожденную событиями: а) A, B; б) C; в) D.

2.31. Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 129; 130; 128?

2.32. Число элементарных событий некоторого вероятностного пространства равно n. Указать минимальное и максимальное возможные значения для числа случайных событий.

2.33. Даны вероятности $p = P(A)$, $q = P(B)$, $r = P(A \cup B)$. Найти вероятность следующих событий $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, $P(A \cap \overline{B})$.

2.34. Доказать неравенство

$$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2, \text{ если } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subset A.$$

2.35. Доказать, что

$$P(\text{Á} \cup \text{Â} \cup C) = P(\text{Á}) + P(B) + P(C) - P(\text{Á} \cap \text{B}) -$$
$$- P(\text{Á} \cap C) - P(B \cap C) + P(\text{Á} \cap \text{B} \cap C).$$

Решить задачу 1.46, используя данное соотношение.

2.36. Пусть $\text{Á}_1 \supset \text{Á}_2 \supset \ldots$ – невозрастающая последовательность событий. Доказать, что

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Á}_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(\text{Á}_n).$$

2.37. Пусть $\acute{A}_1 \subset \acute{A}_2 \subset \ldots$ – неубывающая последовательность событий. Доказать, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \acute{A}_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(\acute{A}_n).$$

2.38. Доказать, что для произвольной последовательности событий

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + \ldots$$

2.39*. См. также задачу 2.9. На плоскости проведены две взаимно перпендикулярные совокупности параллельных прямых, которые разбивают плоскость на прямоугольники со сторонами L и a. Найти вероятность того, что наудачу брошенная на плоскость игла длиной $2l$, $2l < L + a - \sqrt{(L+a)^2 - \pi La}$, пересечет хотя бы одну из проведенных прямых.

2.40*. *(Задача Бертрана).* На окружности радиуса r наудачу выбираются две точки и соединяются хордой. Найти вероятность того, что длина хорды превысит $\sqrt{3}r$.

2.41*. На окружности наудачу выбраны три точки $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$. Найти вероятность того, что треугольник ABC будет остроугольным.

2.42*. Пусть $A_1, A_2, \ldots;\ B_1, B_2, \ldots$ – две последовательности событий, причем $P(B_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать что

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n)$$

при условии, что хотя бы один из указанных пределов существует.

2.43*. Доказать по индукции следующую формулу

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \acute{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\acute{A}_i) - \sum_{i<j} P(\acute{A}_i \cap \acute{A}_j) + \sum_{i<j<k} P(\acute{A}_i \cap \acute{A}_j \cap \acute{A}_k) -$$

$$- \ldots + (-1)^n P(\acute{A}_1 \cap \acute{A}_2 \cap \ldots \cap \acute{A}_n).$$

3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Определение. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) и A, $B \in \mathrm{F}$. Предположим, что $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется отношение вероятностей $P(A \cap B)$ к $P(B)$ и обозначается $P(A/B)$, т.е.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Она обладает следующими свойствами:

а) если $B \subseteq A$, то $P(A/B) = 1$, т.к. в этом случае $A \cap B = B$;

б) если $A \cap B = \varnothing$, то $P((A \cup B)/C) = P(A/C) + P(B/C)$, т.к. $(A \cap C) \cap (B \cap C) = \varnothing, P((A \cup \hat{A}) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$;

в) $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$,

т.к. $1 = P(\Omega/B) = P((A \cup \overline{A})/B) = P(A/B) + P(\overline{A}/B)$.

Пример 3.1. Бросается игральный кубик. Какова вероятность того, что выпало число очков, большее трех (событие A), если известно, что выпала четная грань (событие B)?

Решение. Событию B соответствует выпадение чисел 2, 4, 6; событию A – выпадение чисел 4, 5, 6; событию $A \cap B$ – 4, 6. Поэтому

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{6} : \frac{3}{6} = \frac{2}{3}.$$

Определение. Два события A и B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Определение. Два события $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любых наборов индексов $\{ i_1, i_2, \dots, i_m \}$ таких, что $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n$, $2 \le m \le n$, имеет место равенство

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}\right) = \prod_{k=1}^{m} P\left(A_{i_k}\right).$$

Если это равенство справедливо только для случая, когда $m = 2$, то события называются попарно независимыми.

Пример 3.2. Бросаются две монеты. Пусть событие A состоит в выпадении герба на первой монете, событие B состоит в выпадении цифры на второй монете; событие C – монеты выпадут разными сторонами. В этом случае:

$$\Omega = \{\text{ГЦ}, \text{ГГ}, \text{ЦГ}, \text{ЦЦ}\},\ A = \{\text{ГЦ}, \text{ГГ}\},\ B = \{\text{ГЦ}, \text{ЦЦ}\},$$

$$C = \{\text{ГЦ}, \text{ЦГ}\},\ A \cap B = AB = \{\text{ГЦ}\},$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B);\ P(AC) = \frac{1}{4} = P(A)P(C);$$

$$P(BC) = \frac{1}{4} = P(B)P(C);\ P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8},$$

т.е. A, B, C – попарно независимы (но независимости в совокупности здесь нет).

Следует отметить, что на практике независимость событий проверяется не из определения, а исходя из условий эксперимента: можно показать, что если события связаны с независимыми экспериментами, то и сами события будут независимыми.

Справедливо следующее утверждение, известное как теорема умножения вероятностей. Пусть

$$A_k \in \mathsf{F},\quad k = 1, 2, \ldots, n;\ P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_k\right) > 0 \text{ для всех } 1 \leq m \leq n \text{, тогда}$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)\prod_{m=1}^{n-1} P\left(A_{m+1} / \bigcap_{k=1}^{m} A_k\right).$$

Пример 3.3. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наугад. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем три месяца.

Решение. Обозначим через A_i событие, заключающееся в том, что абонент звонит i-й раз и ему соответствует неудача, $i=\overline{1,3}$. Тогда имеем:

$$P(A_1)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10},\ P(A_2/A_1)=\frac{8}{9},\ P(A_3/A_1A_2)=\frac{7}{8}.$$

Искомая вероятность равна:

$$1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)=0{,}3.$$

Задачи

3.1. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.

3.2. Вероятность попадания в первую мишень для стрелка равна $\frac{2}{3}$. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определите вероятность поражения второй мишени.

3.3. Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных целых чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них хотя бы одно число четное?

3.4. Для некоторой местности среднее число ясных дней в июле равно 25. Найти вероятность того, что первые два дня в июле будут ясными.

3.5. В обществе из $2n$ человек одинаковое число мужчин и женщин. Места за столом занимают наудачу. Определить вероятность того, что два лица одного пола не займут места рядом.

3.6. Имеется группа из k космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью p. За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга m радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

3.7. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 5 % всей продукции является браком, а 75 % не бракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

3.8. Партия из ста деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть не принятой, если она 5 % неисправных деталей?

3.9. Производится испытание прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью p. После первого выхода из строя прибор ремонтируется; после второго – признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя в точности при k-м испытании.

3.10. Вероятность выхода из строя k-го блока ЭВМ за время T равна $p_k, k=1,2,..,n$. Определить вероятность выхода из n блоков ЭВМ, если работа всех блоков взаимно независима.

3.11. ЭВМ, в которой подозревается дефект, подвергается тестированию с целью локализации дефекта. Для этого применяется последовательно n тестов. При обнаружении дефекта тестирование прекращается. Вероятность локализации дефекта при первом тесте равна p_1; условная вероятность локализации дефекта при втором тесте (если при первом он не был локализован) равна p_2; условная вероятность локализации дефекта на i-м тесте (если при первых $i-1$ он не был локализован) равна p_i, $i=1,2,..,n$. Найти вероятности следующих событий: а) проведено не менее трех тестов; б) проведено не более трех тестов; в) дефект локализован в точности при четвертом тесте; г) дефект не локализован после n тестов; д) проведены все n тестов.

3.12. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – независимые в совокупности события. Доказать, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right).$$

3.13. Случайное события A и B несовместны и

$$P(A)>0, P(B)>0.$$

Показать, что события A и B являются зависимыми.

3.14. Доказать, что если события A и B независимы, то $\overline{A}$ и B также являются независимыми событиями.

3.15. Привести пример, показывающий, что из того, что

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \text{ и } P(C) > 0$$

не следует, что

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

3.16. Известно, что события A и B – независимые и несовместные. Найти $\min\{P(A), P(B)\}$.

3.17. Существуют ли случайные события, независимые от самих себя? Определить все такие события.

3.18. Пусть событие A таково, что $P(A)$ равно 0 или 1. Показать, что A и любое событие B независимы.

3.19. Пусть A и B – независимые события и $P(A \cup B) = 1$. Доказать, что либо A, либо B имеет вероятность, равную единице.

3.20. Пусть A и B – независимые события. Доказать, что если $A \cup B$ и $A \cap B$ независимы, то либо $P(A) = 1$, либо $P(B) = 1$, либо $P(A) = 0$, либо $P(B) = 0$.

3.21. Показать, что для независимости событий A и B достаточно выполнения из равенств

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B), \; P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}), \; P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

3.22. Доказать, что если $P(A/B) = P(A/\overline{B})$, то события A и B независимы.

3.23. Каждая буква слова «ЭЛЕКТРОНИКА» написана на отдельной карточке, которые тщательно перемешаны. Последовательно вынимают четыре карточки. Какова вероятность получить слово «КИНО»?

3.24. Вероятность того, что некоторое устройство космического корабля испортится, равна p. Сколько запасных устройств нужно иметь на корабле, чтобы обеспечить вероятность правильной работы не меньшую, чем P?

3.25. Измерительное устройство состоит из двух приборов. Вероятность исправной работы k-го прибора за рассматриваемый промежуток времени равна $1-\alpha_k, k=1,2$. Найти вероятность того, что оба прибора будут работать, если: а) известно, что поломки в них возникают независимо, б) ничего не известно о зависимости между поломками этих приборов.

3.26. Проведены три независимых измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что при одном измерении ошибка превысит заданную точность, равна p. Определить вероятность того, что только в одном из измерений ошибка превысит заданную точность.

3.27. Во время стрельбы ракетами по цели попадания отдельных ракет независимы и вероятность попадания каждой ракеты равна p. Каждая ракета поражает цель с вероятностью p_1. Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования всего боезапаса; количество ракет $n>2$. Найти вероятность того, что не весь боезапас будет израсходован.

3.28. Сообщение, которое передают по каналу связи, состоит из n знаков. При передаче каждый знак искажается независимо от других с вероятностью p. Для надежности сообщение дублируют, т.е. повторяют k раз. Какова вероятность того, что хотя бы одно из переданных сообщений не будет искажено полностью?

3.29. Для того, чтобы найти специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Наличие книги в фонде библиотеки одинаково равновероятно, и если книга есть, то одинаково вероятно, занята она другим читателем или нет. Что более вероятно – достанет студент книгу или нет, если библиотеки комплектуются независимо одна от другой.

3.30. На железнодорожном вокзале пассажир воспользовался автоматической камерой хранения багажа, шифр который состоит из одной буквы русского алфавита и трехзначного цифрового кода. Пассажир набрал шифр, запер сейф, но, возвратившись, забыл свой шифровой набор. Найти вероятность событий: $A=$ $\{$сейф открывается при первой попытке$\}$, $B=$ $\{$сейф открывается после k попыток$\}$.

3.31. Дворцовый чеканщик кладет в каждый ящик вместительностью n монет одну фальшивую. Король подозревает чеканщика и подвергает проверке монеты, взяв наудачу по одной в каждом ящике. Какова вероятность того, что чеканщик не будет разоблачен?

3.32. Прибор состоит из блоков, которые выходят из строя независимо один от другого. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого блока равна p. Найти надежность P прибора для случаев, которые изображены на рис. 3.1.

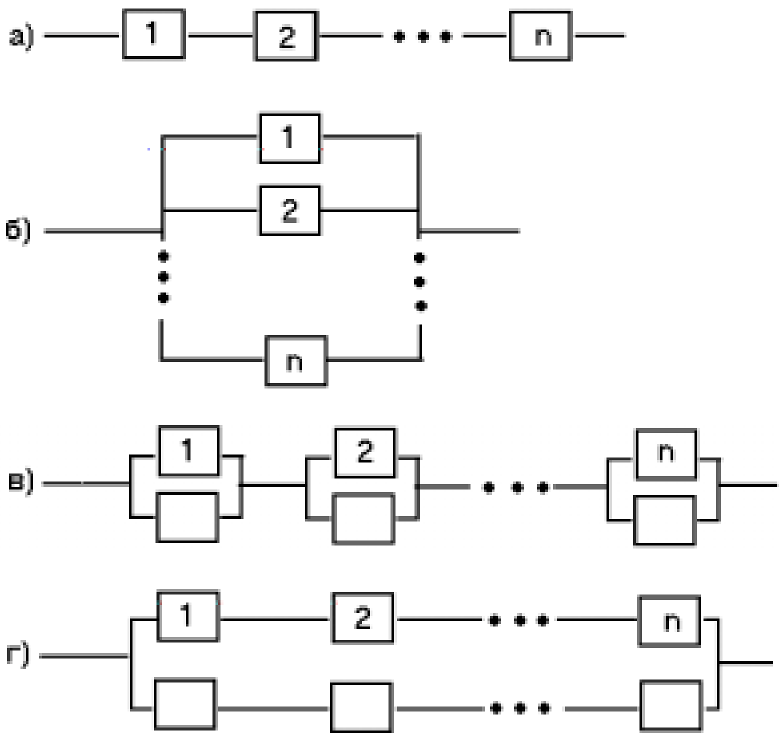

Рис. 3.1

3.33. Прибор состоит из n узлов. Вероятность безотказной работы i-го узла равна $p_i, i=1,2,...,n$. Для работы прибора требуется безотказная работа всех его узлов. При вычислении вероятности R отказа прибора вероятности $p_i, i=1,2,...,n$, приближенно заменяют их средней арифметической:

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i .$$

Будет ли при этом вычисленное приближенное значение $\overline{R}$ вероятности R больше или меньше истинного R?

3.34. Упрощенная схема контроля качества изделий состоит из двух независимых проверок. В результате k-й проверки изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью β_k, а бракованное изделие принимается с вероятностью α_k, $k = 1, 2$. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности следующих событий: а) будет принято бракованное изделие, б) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано.

3.35. Уникальный прибор, от которого требуется очень большая надежность, состоит из k деталей $D_1, D_2, ..., D_k$. Перед сборкой каждую деталь всесторонне проверяют и, если она окажется высококачественной, включают в прибор, а если нет – заменяют запасным экземпляром, который также проверяют. Сборщик имеет в наличии запас деталей каждого типа: n_i экземпляров детали D_i, $i = \overline{1, k}$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Если запасных деталей не хватает, сборка откладывается. Вероятность того, что отдельный экземпляр детали D_i окажется высококачественным, равна P_i и не зависит от качества других экземпляров. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$имеющегося запаса деталей достаточно для сборки прибора$\}$, $B = \{$при данном запасе деталей сборщик может собрать прибор, и хотя бы одна деталь любого типа останется в запасе$\}$.

3.36. Рабочий обязан поддерживать функционирование автоматической линии, состоящей из трех станков, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены первой станок не потребует наладки, равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,85. Какова вероятность того, что в течение смены: а) линия не потребует наладки; б) все три станка потребуют наладки; в) какой-нибудь один станок потребует наладки; г) хотя бы один станок потребует наладки.

3.37. Баллотируются два кандидата, причем за первого в урну опущено n бюллетеней, за второго m бюллетеней, $n > m$. Какова вероятность того, что на протяжении всего времени подсчета бюллетеней количество подсчитанных голосов, которые отданы за первого кандидата, будет больше числа голосов, отданных за второго?

3.38*. Предположим, что события A и B_1 независимы и события A и B_2 также независимы. Показать, что события A и $B_1 \bigcup B_2$ независимы, если и только если события A и $B_1 \bigcap B_2$ независимы.

3.39*. Пусть A, B и C попарно независимы и каждое из них имеет вероятность, отличную от нуля и единицы. Могут ли события $A \bigcap B, B \bigcap C$ и $A \bigcap C$ быть: а) попарно независимыми, б) независимыми в совокупности?

3.40*. Пусть A, B, C, D – события, причем A и B не зависит от C и D. Доказать, что если $A \bigcap B = \varnothing$ и $C \bigcap D = \varnothing$, то $A \bigcup B$ не зависит от $C \bigcup D$.

3.41*. Пусть события A, B и C таковы, что A не зависит от $B \bigcap C$ и от $B \bigcup C$, B не зависит от $A \bigcap C$, а C – от $A \bigcap B$, причем вероятности $P(A), P(B), P(C)$ положительны. Доказать, что события A, B и C независимы в совокупности.

4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Определение. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) Совокупность событий $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathsf{F}$ называется полной группой событий, если выполнены следующие условия:

$$\text{а) } \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega\text{; б) } A_i \cap A_k = \varnothing,\ i \neq k\text{; в) } P(A_k) > 0,\ k = \overline{1,n}.$$

Если $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий, то для любого события

$$B = B \bigcap \Omega = B \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k),$$

и поэтому

$$P(B)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(B\cap A_k)\right)=\sum_{k=1}^{n}P(B\cap A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B/A_k).$$

Формула

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B/A_k)$$

называется формулой полной вероятности для случайных событий.

Если $P(B)>0$, то

$$P(A_k\cap B)=P(B)P(A_k/B)=P(A_k)P(B/A_k).$$

Отсюда следует, что

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)},\quad k=\overline{1,n},$$

т.е. имеет место формула Байеса для случайных событий:

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)},\quad k=\overline{1,n}.$$

При решении задач удобно применять следующую формулировку: если событие $B\in \mathsf{F}$ может происходить только с одним из событий A_1, A_2, ..., A_n, образующих полную группу событий, то справедлива формула полной вероятности и формула Байеса (при $P(B)>0$).

Пример 4.1. Для контроля продукции из трех партий деталей взята на проверку одна деталь. Какова вероятность выявления бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей – бракованные, а в двух других все доброкачественные.

Решение. Пусть $B=${взятая деталь – бракованная}, $A_k=${деталь берется из k-ой партии}, $k=1,3$. Тогда

$$P(A_k)=\frac{1}{3},k=\overline{1,3};\ P(B/A_1)=\frac{2}{3},\ P(B/A_2)=P(B/A_3)=0$$

и поэтому $P(B)=\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B/A_k)=\frac{2}{9}$.

Пример 4.2. Прибор состоит из двух узлов; работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t первого узла равна p_1, второго p_2. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

Решение. Пусть $A_1=\{$оба узла исправны$\}$, $A_2=\{$первый узел отказал, а второй исправен$\}$, $A_3=\{$первый узел исправен, а второй отказал$\}$, $A_4=\{$оба узла отказали$\}$. Эти события образуют полную группу событий. Найдем их вероятности.

$$P(A_1)=p_1p_2,\ P(A_2)=(1-p_1)p_2,$$

$$P(A_3)=p_1(1-p_2),\ P(A_4)=(1-p_1)(1-p_2).$$

Поскольку наблюдалось событие $B=\{$прибор отказал$\}$, то

$$P(B/A_1)=0,\ P(B/A_2)=P(B/A_3)=P(B/A_4)=1.$$

По формуле Байеса находим:

$$P(A_2/B)=\frac{(1-p_1)p_2}{(1-p_1)p_2+p_1(1-p_2)+(1-p_1)(1-p_2)}=\frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}.$$

Задачи

4.1. Среди N экзаменационных билетов n «счастливых». Студенты подходят за билетами один за другим. У кого больше вероятность взять счастливый билет: у того, кто подошел первым, или у того, кто подошел вторым? Какова вероятность взять «счастливый» билет у последнего студента?

4.2. 15 экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

4.3. В техникуме n студентов, из которых n_k, $k=1,2,3$, человек учатся k -й год. Среди двух наудачу выбранных студентов оказалось, что один из них учится больше второго. Какова вероятность того, что этот студент учится третий год?

4.4. Из чисел $1,\ 2,...,\ n$ одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше m ?

4.5. Водитель автомобиля, оказавшись в неизвестной местности, пытается наудачу попасть из пункта A в пункт B. Оценить шансы водителя (вероятность) попасть в пункт B, если возвращения запрещены, а схема дорог приведена на рис. 4.1.

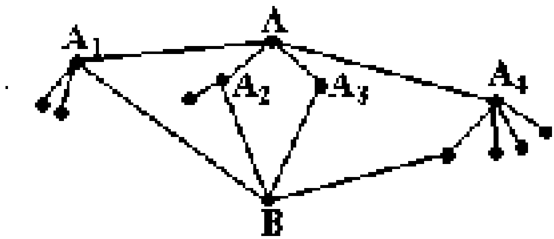

Рис. 4.1

4.6. Вероятность того, что письмо находится в столе, равна p, причем оно с равной вероятностью может находиться в любом из восьми ящиков стола. Проверили семь ящиков – письма не нашли. Какова вероятность того, что письмо в восьмом ящике?

4.7. В группе 10 студентов. Трое подготовились к экзамену на оценку «отлично», четверо на «хорошо», двое на «удовлетворительно», один на «неудовлетворительно». В экзаменационных билетах 20 вопросов. Отличник знает ответ на все вопросы, хороший студент – на 16 вопросов, посредственный – на 10, плохой – на 5. Вызванный студент ответил на все три вопроса. Найти вероятность, что он

а) отличник,

б) плохой студент.

4.8. Вероятности того, что во время работы ЭВМ произойдет сбой в процессоре, в памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в процессоре, в памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в ЭВМ сбой будет обнаружен.

4.9. Студент приходит в лабораторию, в которой находятся ПЭВМ, для выполнения лабораторной работы. Вероятности того, что ПЭВМ заражены вирусом, равны соответственно $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$. Для работы студент выбирает наугад одну из ПЭВМ. При выполнении работы на исправной ПЭВМ (без вирусов) студент ошибается в среднем в k % случаев. Найти вероятность того, что студент правильно выполнит лабораторную работу.

4.10. К серверу подключены N ПЭВМ. Вероятность того, что запросы, поступающие на сервер из одной ПЭВМ в момент времени t, прекратятся до момента $t + \Delta t$, равна áÄt+ ï(Ät). Если в момент времени t из ПЭВМ на сервер не поступают запросы, то вероятность того, что они начнут поступать до момента $t + \Delta t$, равна âÄt+ ï(Ät) независимо от работы других ПЭВМ. Составить дифференциальные уравнения, которым будут удовлетворять $P_n(t)$ – вероятности того, что в момент t на сервер поступают запросы из n ПЭВМ. Найти стационарное решение (при $t \to \infty$) этих уравнений.

4.11. Вероятность поступления на телефонную станцию k вызовов за промежуток времени t равна $P_t(k)$. Будем считать количество вызовов за любые два соседних промежутка времени независимыми. Определить вероятность $P_{2t}(k)$ поступления s вызовов за промежуток времени $2t$.

4.12. Производится посадка самолета не аэродром. Если позволяет погода, летчик сажает самолет, наблюдая за аэродромом визуально. В этом случае вероятность благополучной посадки равна p_1. Если аэродром затянут низкой облачностью, летчик сажает самолет вслепую, по приборам. Надежность (вероятность безотказной работы) приборов слепой посадки равна P. Если приборы слепой посадки сработали нормально, то самолет садится благополучно с той же вероятностью p_1, что и при визуальной посадке. Если же приборы слепой посадки не сработали, то летчик может благополучно посадить самолет с вероятностью $p_2 < p_1$. Найти полную вероятность благополучной посадки самолета, если известно, что в k % всех случаев посадки аэродром затянут низкой облачностью.

4.13. Из условия предыдущей задачи известно, что самолет приземлился благополучно. Найти вероятность того, что летчик пользовался приборами слепой посадки.

4.14. Расследуются причины авиационной катастрофы, о которых можно сделать четыре гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4. По статистике их вероятности равны соответственно 0,2; 0,4; 0,3; 0,1. Выявлено, что в ходе катастрофы произошло возгорание горючего. Условные вероятности этого события при гипотезах H_1, H_2, H_3, H_4, согласно той же статистике, составляют 0,9; 0; 0,2; 0,3. Найти апостериорные вероятности гипотез.

4.15. Для поиска пропавшей подводной лодки выбрано 10 самолетов, и каждый из них можно использовать для поиска в одном из двух возможных районов, где лодка может находиться с вероятностями 0,8 и 0,2 соответственно. Как нужно распределить самолеты по районам поиска, чтобы вероятность обнаружения лодки была наибольшей, если каждый самолет выявляет ее в районе поиска с вероятностью 0,2 и осуществляет поиски независимо от других? Найти вероятность обнаружения лодки при оптимальной процедуре поисков.

4.16. Объект, за которым ведется наблюдение, может находиться в одном из состояний A_1 или A_2, априорные вероятности которых равны p_1 и p_2 соответственно. Есть два источника информации о состоянии объекта: из первого известно, что объект находится в состоянии A_1 , из другого – что в состоянии A_2. Из первого источника правильные сведения о состоянии объекта поступают в 90 %, а из второго – в 60 % случаев. На основе анализа донесений найти апостериорные вероятности состояний A_1 и A_2.

4.17. Перед опытом о его условиях можно сделать n независимых гипотез H_1, $H_2, \ldots, H_n$, которые образуют полную группу с априорными вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. В результате опыта известно, что имела место некоторая гипотеза из группы $H_1, H_2, \ldots, H_k$, $k < n$, а остальные гипотезы невозможны: $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k = \Omega$, $H_{k+1} \cup H_{k+2} \cup \ldots \cup H_n = \varnothing$. Найти апостериорные вероятности гипотез.

4.18. Прибор может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1, p_2, p_3, где $p_1 = p_3 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}5$. Вероятности того, что прибор будет работать заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1, 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что этот прибор проработает заданное число часов.

4.19. Апробируется прибор, состоящий из двух блоков, которые выходят из строя независимо один от другого; работа каждого блока безусловно необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность исправной работы на протяжении времени t) равна для них соответственно p_1 и p_2. По истечении времени t выяснилось, что прибор вышел из строя. Найти с учетом этого вероятности наступления следующих событий: $A_1 = \{$вышел из строя только первый блок$\}$, $A_2 = \{$вышел из строя только второй блок$\}$, $A_3 = \{$вышли из строя оба блока$\}$.

4.20. Во время испытаний было установлено, что вероятность безотказной работы прибора при отсутствии повреждений равна 0,99, при перегреве – 0,95, при вибрации – 0,9, при вибрации и перегреве – 0,8. Найти вероятность P_1 отказа этого прибора во время работы в жарких странах (вероятность перегрева – 0,2, вибрации – 0,1) и вероятность P_2 отказа во время работы в передвигающейся лаборатории (вероятность перегрева – 0,1, вибрации – 0,3), если считать перегрев и вибрацию независимыми событиями.

4.21. В условиях задачи 4.20 найти границы, в которых могут лежать вероятности P_1 и P_2, если отказаться от предложения о независимости перегрева и вибрации.

4.22. По каналу связи передается одна из последовательностей букв (команда) AAAA, BBBB, CCCC с вероятностями p_1, p_2, p_3 $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. Каждая независимая буква принимается правильно с вероятностью α и с вероятностями

$\frac{1}{2}(1-\alpha)$ и $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ принимается за каждую из двух других букв.

Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что было передано AAAA, если принято ABCA.

4.23. По каналу связи передают символы A, B, C с вероятностями 0,4; 0,3; 0,3 соответственно. Вероятность искажения символа равна 0,4, и все искажения равновероятны. Для увеличения надежности каждый символ повторяют четыре раза. На выходе восприняли последовательность BACB. Какова вероятность того, что передали AAAA, BBBB, CCCC?

4.24. Сообщение может передаваться по каждому из n каналов связи, находящихся в разных состояниях: n_1 каналов – в отличном состоянии, n_2 – в хорошем, n_3 – в посредственном и n_4 – в плохом, $n_1+n_2+n_3+n_4=n$. Вероятности правильной передачи сообщения для различных типов каналов равны соответственно p_1, p_2, p_3, p_4. Для увеличения точности сообщения его передают два раза по двум разным каналам, которые выбирают наугад. Найти вероятность того, что хотя бы по одному из каналов оно будет передано правильно.

4.25. Есть пять каналов связи, передача сообщений по которым распределяется случайным образом с равной вероятностью. Вероятность искажения сообщения при его передаче по i-му каналу равна p_i, $i=\overline{1,5}$. Выбран некоторый канал и по нему переданы $n-1$ сообщений; ни одно из них не исказилось. Найти вероятность того, что n-е сообщение, переданное по тому же самому каналу, не будет искажено.

4.26. Передача сигналов происходит с вероятностями P_1, P_2, P_3, в одном из трех режимов. В каждом из них сигнал доходит до адресата неискаженным помехами с вероятностями соответственно p_1, p_2, p_3. Передача трех сигналов происходила в одном из трех режимов, в каком – неизвестно. Найти апостериорные вероятности того, что передача происходила в первом, втором и третьем режимах.

4.27. На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью $(1-p)$ – только одна помеха. Когда поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-либо сигнала с вероятностью p_1, если поступает только помеха – с вероятностью p_2. Известно, что устройство зарегистрировало присутствие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе присутствует полезный сигнал.

4.28. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может применять либо не применять помехи. Если объект не применяет помех, то за один цикл наблюдения станция обнаруживает его с вероятностью p_0, если применяет – с вероятностью $p_1 < p_0$. Вероятность того, что на протяжении цикла будут применяться помехи, равна p и не зависит от того, как и когда применялись помехи во время остальных циклов. Определить вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов наблюдения.

4.29. На наблюдательной станции установлены четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения целей с помощью первого локатора равна 0,86, второго – 0,9, третьего – 0,92, четвертого – 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

4.30. Самолет, вылетающий на задание, производит радиопомехи, которые с вероятностью 0,5 «забивают» радиосредства системы противовоздушной обороны (ПВО). Если радиосредства «забиты», самолет подлетает к объекту необстрелянным, производит стрельбу ракетами и поражает объект с вероятностью 0,9. Если радиосредства системы ПВО «не забиты», то самолет подвергается обстрелу и сбивается с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что объект будет разрушен.

4.31.Цель, по которой ведется стрельба, с вероятностью p находится в пункте A, а с вероятностью $(1-p)$ – в пункте B. В распоряжении стреляющего есть N ракет, каждая из которых поражает цель с вероятностью P независимо от других. Какое количество ракет нужно выпустить по пункту A для того, чтобы поразить цель с максимальной вероятностью?

4.32. Противник может применять ракеты трех типов *A, B, C* с вероятностями: $P(A)=0{,}3;\ P(B)=0{,}6;\ P(C)=0{,}1$. Вероятности сбить ракету этих типов равны соответственно 0,6; 0,8; 0,9. Известно, что противник применил две ракеты одного типа. Определить вероятность того, что обе ракеты будут сбиты.

4.33. Вероятность размножения бактерии в течение времени $(t, t + Ät)$ равна $âÄt + ï(Ät),\ Ät \to 0$. Процесс размножения каждой бактерии протекает независимо от других бактерий и ее поведения до момента t. В начальный момент в банке было r бактерий. Найти вероятность того, что в момент t в банке будет n бактерий.

4.34. Решите задачу 4.33 при дополнительном условии, что вероятность гибели бактерий в течение времени $Ät$ равна $ãÄt + ï(Ät),\ Ät \to 0$.

4.35. Вероятность того, что двое близнецов будут одного пола, приблизительно равна 0,64, а вероятность рождения в двойне первым мальчика – 0,51. Найти вероятность того, что второй из близнецов будет мальчиком при условии, что первый из них мальчик.

4.36. Частица блуждает по целым точкам отрезка $[a,b]$, причем движется направо с вероятностью p и налево с вероятностью $q = 1 - p$. Определить вероятность того, что она достигнет правого конца, если в начальный момент находится в точке $n \in [a,b]$.

4.37. Некоторая деталь производится на двух заводах. Известно, что объем продукции первого завода в n раз превышает объем продукции второго завода. Доля брака на первом заводе P_1, на втором P_2. Наугад взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь выпущена первым заводом?

4.38. Трое сотрудников фирмы выдают соответственно 30 %, 50 % и 20 % всех изделий, производимых фирмой. У первого брак составляет 2 %, у второго – 5 %, у третьего – 1 %. Какова вероятность, что случайно выбранное изделие фирмы дефектно?

4.39. В условиях предыдущей задачи известно, что случайно выбранное изделие оказалось дефектным. Найти вероятность, что оно было сделано соответственно первым, вторым и третьим сотрудником фирмы.

4.40. Отдел входного технического контроля (ОТК) проверяет взятые наугад изделия из партии, содержащей, по данным поставщика, a изделий первого сорта и b изделий второго сорта. ОТК считает возможным количество изделий первого сорта в размере $a-2,\ a-1,\ a,\ a+1$ с вероятностями соответственно $p_i,\ i = \overline{1,4}$. Проверка первых m $(m < b)$ изделий обнаружила, что все они второго сорта. С какой вероятностью ОТК может утверждать, что партия содержит изделий второго сорта больше, чем b?

4.41. Решить задачу 4.40 при условии, что проверено 50 % всех изделий, и $a = 5,\ b = 25,\ p_1 = p_4 = 0{,}1,\ p_2 = 0{,}2,\ p_3 = 0{,}6$.

4.42. На технический контроль качества предъявляется партия из 1000 деталей, в которой 200 деталей изготовлено на заводе A, 300 деталей – на заводе B, остальные – на заводе C. Доля брака зависит от завода-изготовителя и оставляет для завода A и B 15 %, а для завода C – 30 %. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

4.43. Вероятность того, что некоторое устройства перестанет функционировать на протяжении времени $(t, t+\Delta t)$ равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, $\Delta \to 0$. Какова вероятность того, что оно проработает до момента t, если отказ его после момента s не зависит от функционирования до момента s?

4.44. Среди женщин-избирателей 70 % поддерживают кандидата от партии A, а среди мужчин-избирателей – 60 %. Используя данные переписи, согласно которым доля женщин среди избирателей составляет 55 %, оценить вероятность победы на выборах кандидата от партии A.

4.45. Исследуется динамика курсов валют A и B (по отношению к некоторой валюте C) с целью прогнозирования. Статистика валютных торгов показывает, что курс валюты B возрастает: в 80 % случаев, если вырос курс A; в 30 % случаев, если снизился курс A; в 50 % случаев, если курс A не изменился. Предполагая, что все три исходные гипотезы об изменении курса A равновозможны, оценить вероятности этих гипотез, если известно, что на последних торгах курс валюты B вырос.

4.46*. В урне находятся белые и черные шары. Пусть имеется S предположений A_1, A_2, ..., A_s о том, что доля белых шаров в урне равна соответственно p_1, p_2,..., p_s. Будем считать, что эти предположения выполняются с вероятностями

$$\alpha_1,\ \alpha_2, ...,\ \alpha_s,\ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1 .$$

Для проверки произведем выбор шаров с возвращением объема n_1. Пусть выборка содержит m_1 белых шаров (событие B). Вычислим $\beta_i = P(A_i/B)$, $i = \overline{1,s}$ и рассмотрим их как исправленные значения взамен α_1, α_2,..., α_s (для удобства переобозначим и сами исходные предположения: B_1, B_2,..., B_s). Для дополнительной корректировки произведен выбор с возвращением объема n_2. Допустим, что число белых шаров в выборе равно m_2 (событие C). Найдем $P(B_i/C)$. Пусть, далее, событие D состоит в том, что выборка объема $n_1 + n_2$ содержит $m_1 + m_2$ белых шаров. Доказать, что $P(A_i/D) = P(B_i/C)$, $i = \overline{1, \mathrm{s}}$.

5. СХЕМА НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

Определение. Испытанием (экспериментом, опытом) называется последовательность из двух актов: 1) создание комплекса условий, 2) наблюдение появившегося события. Испытания называются независимыми, если наблюдаемые события являются независимыми.

Определение. Независимыми испытаниями Бернулли называются такие испытания, для которых вероятности появления событий в каждом испытании одинаковы и не меняются от испытания к испытанию.

Нас будет интересовать следующая задача. Пусть производятся n испытаний Бернулли. В каждом испытании возможно появление события A с вероятностью p и невозможно с вероятностью $q = 1 - p$. Нужно определить $P_n(m)$ – вероятность того, что в n испытаниях событие A появляется ровно m раз.

Результат n испытаний удобно описать набором букв длиной n, который состоит из букв A и B: $\omega = (A\ A\ B ...\ A\ B\ A)$, где буква A означает, что в испытании появилось событие A, а B – что в испытании появилось противоположное событие $\overline{A}$. Каждый набор интересующих нас исходов содержит m букв A и $n - m$ букв B, поэтому все такие исходы имеют одинаковую вероятность $p^m q^{n-m}$. Разные наборы отличаются только размещением букв A и B, поскольку число случаев, в которых появляется событие A, фиксировано. Размещение букв A и B однозначно определяется выбором m элементов из n, что можно сделать C_n^m способами. Поэтому

$$P_n(m) = \mathrm{C}_n^m p^m q^{n-m} = \mathrm{C}_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \ m = \overline{0, n}.$$

Эта формула называется формулой Бернулли. Очевидно, что

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1 .$$

Пример 5.1. В течение смены, которая длится время t, эксплуатируется n ПЭВМ. Каждая ПЭВМ имеет надежность (вероятность безотказной работы) p и выходит из строя независимо от других. Найти вероятность $P(A)$ того, что инженер-электроник, вызванный по окончанию времени t для ремонта неисправных ПЭВМ, справится со своей задачей за время τ, если на ремонт каждой неисправной ПЭВМ ему требуется время τ_0.

Решение. Событие A равносильно тому, что число вышедших из строя ПЭВМ меньше, чем $l = [\tau / \tau_0]$, где $[\tau / \tau_0]$ – наибольшее целое число, которое меньше либо равно τ / τ_0. Поэтому

$$P(A) = \sum_{m=0}^{l} \mathrm{C}_n^m (1-p)^m p^{n-m}.$$

Когда число испытаний велико, для вычисления $P_n(m)$ можно пользоваться приближенными формулами, которые вытекают из предельной теоремы Пуассона и локальной предельной теоремы Муавра-Лапласа.

В частности, имеет место предельная теорема Пуассона: если $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $np \to \text{ё}$, $0 < \text{ё} < \infty$, то

$$P_n(m) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\text{ё}^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Она выполняется потому, что если положить $np = \text{ё}_n$, то

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\text{ё}_n}{n} \right)^m \left(1 - \frac{\text{ё}_n}{n} \right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda_n^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \ldots \left(1 - \frac{m-1}{n} \right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^{-m}.$$

Далее путем предельного перехода при $n \to \infty$ получим утверждение теоремы.

Приближенная формула, которая следует из этой теоремы, имеет вид (при больших n и малых p)

$$P_n(m) \approx \frac{\text{ё}^m}{m!} e^{-\lambda}, \; m = \overline{0,n}.$$

Она применяется при решении задач, в основном, когда $\text{ё}_n = np \le 10.$.

Пример 5.2. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,001. Проведено 5000 испытаний. Найти вероятность, что событие в них произойдет не менее двух раз.

Решение. $\text{ё}_n = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5 < 10.$ Искомая вероятность равна

$$P\{m \ge 2\} = \sum_{m=2}^{n} P_n(m) = 1 - P_n(0) - P_n(1) =$$

$$= 1 - P_{5000}(0) - P_{5000}(1) = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 1 - 6e^{-5} \approx 0{,}9596.$$

Заметим, что в данном примере $p \approx 0$, а найденная вероятность $P\{m \ge 2\} \approx 1.$

При $n \to \infty$ имеет место также локальная предельная теорема Муавра-Лапласа:

$$\frac{P_n(m)}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{x_m^2}{2}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1,$$

где $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, $-\infty < a \le x_m \le b < +\infty.$ Из нее при больших n вытекает следующая приближенная формула

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{x_m^2}{2}}.$$

На практике ею обычно пользуются, когда $\text{ё}_n = np > 10$. Она даёт хорошие приближения при $p \approx \dfrac{1}{2}$, и часто используется, когда $n > 100$, $np(1-p) > 20$.

Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа имеет вид:

$$P\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Для того, чтобы показать, что она имеет место, можно воспользоваться предыдущей теоремой, из которой следует: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, такое что $\forall\, n \ge n_\varepsilon$

$$\left| \frac{P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{x_m^2}{2}}} \right| < \varepsilon\ ,$$

т.е.

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_m^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} < P_n(m) < (1+\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_m^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\cdot$$

Пусть $-\infty < a \le b < +\infty, \sum^* = \sum\limits_{m:a\le\frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le b}$, тогда, учитывая, что

$$\sum{}^* P_n(m) = P\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b \right),\ \Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\,,$$

можно записать

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum{}^* e^{-\frac{x_m^2}{2}} \Delta x_m < P\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b \right) <$$

$$< (1+\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum{}^* e^{-\frac{x_m^2}{2}} \Delta x_m .$$

Если $n \to \infty$,то $\Delta x_m \to 0$, поэтому при $n \to \infty$:

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt < P\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) < (1+\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt .$$

Из данной теоремы вытекает приближенная формула

$$P\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ интеграл Лапласа; $\Phi(0) = 0$;

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $\Phi(x) \approx 0{,}5$, $x \ge 5$.

Таблица значений функции $\Phi(x)$ приведена в Приложении.

Пример 5.3. Театр, вмещающий 1000 зрителей, имеет два входа. У каждого входа имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов, чтобы в среднем в 99 случаях из100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Предполагается, что зрители приходят парами и каждая пара независимо от других выбирает с вероятностью 0,5 любой из входов.

Решение. Пусть число мест в каждом гардеробе равно N, для его нахождения составим уравнение. Занумеруем гардеробы номерами 1 и 2. Выбор зрителями того или иного гардероба можно рассматривать как испытание Бернулли, в каждом из которых определенная пара с вероятностью 0,5 выбирает гардероб, например, №1. По условию задачи $n = 500,\ p = 0{,}5$. Пусть событие A состоит в том, что зрители разденутся в гардеробе того входа, куда они зашли, m – число пар зрителей, выбравших гардероб №1.

Событие A будет происходить, если $500 - \frac{N}{2} \le m \le \frac{N}{2}$.

По условию $P(A) = 0{,}99$. Поэтому

$$0{,}99 = P(A) = P\left(500 - \frac{N}{2} \le m \le \frac{N}{2}\right) =$$

$$= P\left(\frac{500 - \frac{N}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{\frac{N}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\frac{N}{2} - 250}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{250 - \frac{N}{2}}{\sqrt{125}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\frac{N}{2} - 250}{\sqrt{125}}\right),$$

$$\text{т.е. } \Phi\left(\frac{\frac{N}{2} - 250}{\sqrt{125}}\right) \approx 0{,}495.$$

С помощью таблицы для функции $\Phi(x)$ находим $\Phi(2{,}56) \approx 0{,}495$, таким образом, $\dfrac{\frac{N}{2} - 250}{\sqrt{125}} \approx 2{,}56$, откуда следует, что $N \approx 556$.

Из интеграла предельной теоремы Муавра-Лапласа получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \le \frac{m - np}{n} \le \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \le \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1,$$

т.е. $$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1\quad\forall\varepsilon>0.$$

Последнее соотношение носит название *закона больших чисел в форме Бернулли*. Из него следует, что при большом числе испытаний частота появления события почти не отличается от вероятности этого события.

Задачи

5.1. Приближенная формула, которая вытекает из интегральной предельной теоремы Муавра-Лапласа, справедлива также, если

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Построить график этой функции и доказать, что $\Phi(-\infty)+\Phi(x)=1$.

5.2. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны для них соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

5.3. При проведении зачета с помощью ЭВМ студенту предлагается 5 вопросов. Вероятность, что студент правильно ответит на один вопрос, равна 0,5. Для получения зачета студенту необходимо правильно ответить не менее чем на 3 вопроса. Найти вероятность получения зачета.

5.4. Какова вероятность, что в группе, состоящей из 30 студентов, никто не родился в сентябре?

5.5. На лекции по теории вероятностей присутствуют 50 человек. Найти вероятность того, что k человек из присутствующих родились 14 июня и l человек родились 23 ноября. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день одна и та же для всех дней года. Решить задачу при $k=1,\ l=2$. Найти вероятность того, что число родившихся 14 июня и 23 ноября не больше двух.

5.6. Рыбак забросил спиннинг 100 раз. Какова вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 200 забрасываний.

5.7. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

5.8. Визуальное наблюдение искусственного спутника Земли возможно в данном пункте с вероятностью 0,1 каждый раз, когда он пролетает над этим пунктом. Сколько раз должен пролететь спутник над пунктом наблюдения, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9975 удалось сделать над ним не менее пяти наблюдений?

5.9. Попытки наблюдать спутник (см. предыдущую задачу) проводятся 100 раз. Найти практически достоверный диапазон числа успешных наблюдений.

5.10. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки)?

5.11. В одном из матчей на первенство мира по шахматам ничьи не учитывались, и игра шла до тех пор, пока один из участников мачта не набирал 6 очков (выигрыш – 1 очко, проигрыш и ничья – 0 очков). Считая участников мачта одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает 3 очка.

5.12. Вероятность появления события в одном опыте равна p. С какой вероятностью можно утверждать, что частота появления этого события в n опытах будет лежать в пределах от ё до â? Решить задачу при $n = 100$, $p = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 0{,}4$.

5.13. Вероятность появления события в каждом из n независимых опытов равна p. Найти положительное число ε такое, что с вероятностью P абсолютная величина отклонения частоты появления события от его вероятности будет не больше ε. Решить задачу при $n = 400$, $P = 0{,}98$, $p = 0{,}8$.

5.14. Сколько нужно провести независимых опытов, чтобы с вероятностью P событие A, вероятность появления которого в одном опыте равна p, наблюдалось не менее, чем m раз? Решить задачу при $P = 0{,}8$, $p = 0{,}05$, $m = 5$.

5.15. Сколько нужно провести независимых опытов, чтобы с вероятностью P утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности этого события, равной p, не больше, чем на ε? Решить задачу $P = 0{,}9$, $p = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}1$.

5.16. Каждую секунду с вероятностью p по дороге проезжает автомашина. Пешеходу, для того чтобы перейти дорогу, нужно 3 с. Какова вероятность того, что пешеход, подошедший к дороге, будет ждать возможности перехода: а) 3 с; б) 4 с; в) 5 с?

5.17. Вероятность зарегистрировать частицу счетчиком равна 0,0001. Какое наименьшее количество частиц должно вылететь из источника для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, счетчик зарегистрировал больше трех частиц?

5.18. Вероятность столкновения космического корабля с метеоритом в течение часа полета равна 0,001. Найти практически возможные границы числа столкновений с метеоритами на протяжении трех месяцев полета – с 1 июня по 31 августа, если вероятность практической возможности принимается в данном случае равной 0,9995.

5.19. Аппаратура состоит из n элементов. Вероятность выхода из строя одного элемента за наблюдаемое время равна p и не зависит от состояния других элементов. Найти вероятность выхода из строя: а) равно m элементов, б) не меньше, чем m элементов, в) не больше, чем m элементов. Решить задачу, когда 1) $n = 5,\ p = 0{,}2,\ m = 2$; 2) $n = 500,\ p = 0{,}002,\ m = 2$.

5.20. Электрическая цепь состоит из n последовательно включенных лампочек. Определить вероятность того, что при повышении напряжения в сети выше номинального произойдет разрыв цепи, если вероятность того, что лампочка перегорит, равна p . Решить задачу для: а) $n = 2,\ p = 0{,}4$, б) $n = 20,\ p = 0{,}1$.

5.21. Найти наивероятнейшее число отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях некоторой величины, если в каждом из измерений вероятность получить положительную ошибку равна $\frac{2}{3}$, а отрицательную – $\frac{1}{3}$.

5.22. Линия связи, имеющая k каналов, связывает два города, где есть n абонентов, каждый из которых пользуется для этого телефоном в среднем l мин в час. Найти вероятность безотказного обслуживания абонентов. Решить задачу для $n = 1000,\ k = 130,\ l = 6$.

5.23. Телефонная станция A_2 , которая обслуживает 20000 абонентов, должна соединять их с другой станцией B . Какое наименьшее число линий должно связывать А и В, чтобы в 99 % вызовов нашлась свободная линия. Имеется в виду, что в течение наиболее напряженного часа каждый абонент разговаривает в среднем 2 мин.

5.24. По каналу связи передается n сообщений. Каждое из них независимо от других с вероятностью p искажается помехами. Найти вероятности следующих событий: $A=\{$из n сообщений m искажаются помехами$\}$, $B=\{$искажается не более половины всех передаваемых сообщений$\}$.

5.25. Для увеличения надежности передачи важного сообщения, которое состоит из n символов, каждый из передаваемых символов дублируется m раз. В качестве воспринимаемого символа в пункте приема принимается тот, который продублирован не меньше k раз из m. Когда символ в пункте приема повторяется меньше чем k раз, то такой символ считается искаженным. Вероятность правильной передачи каждого символа одинакова и не зависит от того, как передаются другие символы. Найти вероятности следующих событий: $A=\{$отдельный передаваемый символ в сообщении будет правильно воспринят в пункте приема$\}$, $B=\{$все сообщение будет правильно воспринято в пункте приема$\}$, $C=\{$в сообщении искажаются не больше m символов$\}$.

5.26. В течение часа фирма принимает в среднем k сообщений по электронной почте, обработкой которых занимается специальный сотрудник. Какова вероятность того, что за m минут на фирму не поступит ни одного сообщения? Решить задачу, когда: а) $k=2,\ m=45$; б) $k=60,\ m=5$.

5.27. Железнодорожный состав состоит из n вагонов, каждый из которых с вероятностью p имеет дефект. Все вагоны осматривают независимо друг от друга два мастера; первый из них обнаруживает дефект (если он имеется) с вероятностью p_1, второй – с вероятностью p_2. Какова вероятность отправления в рейс состава, в котором имеется хотя бы один дефектный вагон? Решить задачу для $n=150,\ p_1=0{,}95,\ p_2=0{,}9$.

5.28. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью r (независимо от других) оказывается дефектным. При осмотре дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p. Для контроля из продукции завода выбираются n изделий. Найти вероятность, что хотя бы в одном из них обнаружен дефект. Решить задачу при а) $n=5,\ p=0{,}9,\ r=0{,}1$; б) $n=50,\ p=0{,}9,\ r=0{,}3$.

5.29. Имеется партия изделий. Каждое из них независимо от других может оказаться дефектным с вероятностью 0,2. Из партии берут 10 изделий и проверяют их на годность. Если число дефектных изделий при этом не более 1, то партию принимают, в противном случае подвергают сплошному контролю. Какова вероятность того, что партия будет принята?

5.30. В лотерее 40000 билетов, ценные выигрыши попадают на 3 билета. Определить: а) вероятность получения хотя бы одного выигрыша на 1000 билетов, б) сколько необходимо приобрести билетов, чтобы вероятность получения ценного выигрыша была не менее 0,5.

5.31. Транспортная фирма занимается перевозкой изделий со склада в магазин. Вероятность того, что при перевозке изделие будет повреждено, равна 0,002. Фирме необходимо перевести 1000 изделий. Найти вероятность того, что магазин получит: а) хотя бы одно поврежденное изделие; б) менее двух поврежденных изделий; в) 3 % поврежденных изделий. Какова вероятность наиболее вероятного числа поврежденных изделий в наудачу выбранных пяти контейнерах (в одном контейнере – 20 изделий)?

5.32. Для нового офиса фирма A приобрела n новых персональных компьютеров. В течение определенного периода времени каждый компьютер может выйти из строя с вероятностью p. Устранением неисправностей в компьютерах занимается фирма B. В конце данного периода фирма A обращается к услугам фирмы B и платит ей за ремонт каждого неисправного компьютера сумму $\$\,d$. Какова вероятность того, что фирме A по истечении этого периода придется заплатить фирме B сумму: а) менее $\$\,D$, б) не менее $\$\,D$. Решить задачу для $n=50$, $p=0{,}01$, $d=40$, $D=1000$.

5.33. Что вероятнее выиграть у брокера одинаковой квалификации: а) три сделки из четырех или пять из восьми, б) не менее трех сделок из четырех или не менее пяти сделок из восьми, в) не более n из $2n$ сделок или более n из того же числа, г) не более n из $2n+1$ сделок или более n из того же числа.

5.34. Товаровед исследует 50 образцов некоторого товара. Производитель этого товара указывает, что процент брака составляет 15 %. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает как годные.

5.35. При наступлении кризиса сбыта продукции фирма не терпит убытков с вероятностью p_1, полностью терпит банкротство с вероятностью p_2 и несет серьезные издержки с вероятностью

$p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Две серии серьезных издержек приводят к полному банкротству фирмы. Найти вероятность того, что при наступлении n признаков сбыта фирма не обанкротится.

5.36. Пункт A нужно связать компьютерной связью с 10 абонентами пункта B. Каждый абонент занимает канал связи 12 минут в час. Вызовы любых двух абонентов независимы. Какое минимальное число каналов необходимо для того чтобы можно было в любой момент времени с вероятностью 0,99 обслужить всех абонентов?

5.37. Вероятность появления фальшивой банкноты в банке равна $p = 10^{-8}$. В течение рабочей недели банк оперирует с $n = 7{,}5 \cdot 10^8$ банкнотами. Оценить вероятности встретить в ходе обработки 0; 1; 2; 3 фальшивые банкноты.

5.38. Для определения доли избирателей, поддерживающих кандидата A, производится выборочное обследование. Определить объем выборки, при которой с вероятностью, не меньшей 0,99, погрешность составит менее 0,005.

5.39*. В схеме Бернулли $p = \frac{1}{2}$. Доказать, что:

а) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \le P_{2n}(n) \le \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{2n}(n \pm h)}{P_{2n}(n)} = e^{-t^2}$, где $t = \dfrac{h}{\sqrt{n}}$, $0 \le t < +\infty$.

5.40*. Доказать, что при $npq \ge 25$.

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2npq}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[1 + \frac{(q-p)(t^3 - 3t)}{6\sqrt{npq}} \right] + \Delta,$$

$$\text{где } t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \ |\Delta| < \frac{0{,}15 + 0{,}25|p - q|}{\sqrt{(npq)^3}} |t| e^{-\frac{3}{2}\sqrt{npq}}.$$

5.41*. Проведено n независимых испытаний. Вероятность появления события A в i-м испытании равна p_i. Доказать, что:

а) $\dfrac{P_n(1)}{P_n(0)} \geq \dfrac{P_n(2)}{P_n(1)} \geq \ldots \geq \dfrac{P_n(n)}{P_n(n-1)}$;

б) $P_n(m)$ сначала возрастает, а затем убывает, если только $P_n(0)$ или $P_n(n)$ сами не являются максимальными.

6. ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть F – σ-алгебра множеств пространства Ù . Пара (Ù , F) называется измеримым пространством. Отображение î одного измеримого пространства в другое называется измеримой функцией, т.е. если ù $\in$ Ù и î(ù)$\in R$, то î(.):(Ù , F) $\to$ (R, B) . Здесь B – σ-алгебра множеств пространства R. Другими словами, î(ù) – измеримая функция, если для любого борелевского множества B {ù : î(ù) $\in B$} $\subset$ F. Пусть теперь $(\Omega$, F $, P)$ – вероятностное пространство, R – числовая ось, B – σ-алгебра, порожденная интервалами на числовой оси (эту σ-алгебру называют системой борелевских множеств, или борелевским полем множеств).

Определение. Измеримая функция î(ù) т.е. такая, что $\forall B \in$ B {ù : î(ù) $\in B$} $\subset$ **F**, называется случайной величиной (СВ).

Пример 6.1. Пусть Ù – множество студентов на факультете. Каждый отдельный студент – элемент ù $\in$ Ù . Определим на элементах Ù функцию î(Ù), которая принимает значения, равные году рождения студента, который является элементом Ù . Таким образом, определенная функция является случайной величиной (имеется в виду, что, кроме Ù , задана вероятностная функция P(ù)).

Пример 6.2. По промежуткам времени безотказной работы приборы делятся на несколько типов, например, первый, второй, третий. Пусть Ù(ω) – множество значений, которые могут принимать промежутки времени безотказной работы прибора, а î(ù) – номер типа, который присваивается прибору с промежутком безотказной работы ù . Тогда î(ù) является СВ.

Определение. Действительная функция $f(x), x \in R$, называется борелевской, если прообраз $f^{-1}(B) = \{\ x{:}f(x) \in B\ \}$ любого борелевского множества B числовой прямой является борелевским множеством.

Пример 6.3. Покажем, что если $\hat{\imath}(\grave{u})$ – СВ, а $f(x)$ – борелевская функция, то $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$ – также СВ. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, на котором задана $\hat{\imath}(\grave{u})$ и B – σ-алгебра борелевских множеств прямой, $B \in \mathsf{B}$. Т.к. $f(x)$ – борелевская функция, то $f^{-1}(B) = B_1 \in \mathsf{B}$. Но $\eta^{-1}(B) = \xi^{-1}(B_1) \in \mathsf{F}$ и, следовательно, $\eta(\omega)$ – СВ.

Определение. Пусть $\hat{A}_x = (-\infty, x]$. Функция

$$F_{\hat{\imath}}(x) = P\{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \in B_x\} = P\{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x\} = P\{\hat{\imath} \le x\}$$

называется функцией распределения (ф.р.) случайной величины $\hat{\imath}(\grave{u})$.

Теорема (свойства ф.р.). 1) $F_{\hat{\imath}}(x)$ – монотонно неубывающая функция; 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{\hat{\imath}}(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{\xi}(x) = 1$; 3) $F_{\hat{\imath}}(x)$ – непрерывная справа функция.

Доказательство.

1) Поскольку $\{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x_1\} \le \{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x_2\}$ для $x_1 \le x_2$, то

$$P\ \{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x_1\} \le P\{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x_2\} \Rightarrow F_{\hat{\imath}}(x_1) \le F_{\hat{\imath}}(x_2).$$

2) $\{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x\} \xrightarrow[x \to -\infty]{} \varnothing \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности

$P\{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x\} \xrightarrow[x \to -\infty]{} P(\varnothing) = 0$; $\{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x\} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \grave{\mathrm{U}} \Rightarrow$ по

аксиоме непрерывности $P\{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x\} \xrightarrow[x \to +\infty]{} P(\grave{\mathrm{U}}) = 1.$

3) Пусть $x_1 > x_2 > \ldots, \lim\limits_{k \to \infty} x_k = x,\ \{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) \le x_k\} = \acute{A}_k,$

$\{\omega : \xi(\omega) \le x\} = B$, тогда $B = \bigcap\limits_k B_k \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности

$P(B) = F_\xi(x) = \lim\limits_{x_k \to x} P(B_k) = \lim\limits_{x_k \to x} F_\xi(x_k)$.

Теорема. Если функция $F(x)$ обладает свойствами 1)–3), то существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и СВ $\xi(\omega)$, определенная на нем, такая, что $F_\xi(x) = F(x)$.

Рассмотрим дискретное вероятностное пространство, в этом случае пространство элементарных событий состоит из дискретного множества элементарных событий (счетного или конечного) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\}$. Пусть

$$x_k = \xi(\omega_k),$$

$$\xi(\omega) \in \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\},\ A_k = \{\omega : \xi(\omega) = x_k\}, k = 1, 2, ...$$

Случайные величины, которые могут принимать только конечное или счетное множество значений, называются дискретными. Для их описания удобно пользоваться набором вероятностей

$$\{p_1, p_2, ..., p_k, ...\}, \text{ где } p_k = P(A_k) = P\{\omega : \xi(\omega) = x_k\},$$

который называется распределением вероятностей дискретной СВ $\xi(\omega)$. Поскольку

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \ne j,$$

$$\text{то } P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

(условие нормировки). Совокупность

$$x_1, x_2, ..., x_k, ...$$

$$p_1, p_2, ..., p_k, ...$$

называется дискретным законом (рядом) распределения вероятностей.

Установим связь между распределением вероятностей и функцией распределения:

$$F_{\xi}(x)=P\{\omega:\xi(\omega)\le x\}=P\left(\bigcup_{\{k:x_k\le x\}}\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}\right)=$$

$$=\sum_{\{k:x_k\le x\}}P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}=\sum_{\{k:x_k\le x\}}p_k,$$

$p_k=F_{\xi}(x_k)-F_{\xi}(x_{k-1})$, если считать, что $F_{\xi}(x_0)=0$.

В связи с тем, что свойства СВ полностью определяются свойствами их функций распределения, то их принято классифицировать по характеру этих функций.

I. Дискретные СВ (ф.р.). В этом случае множество значений $\xi(\omega)$: $x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots$ – счетно либо конечно, $F_{\xi}(x)=\sum_{\{k:x_k\le x\}}p_k$;

ф.р. обладает, кроме основных, следующими свойствами:

1) $F_{\xi}(x)$ имеет конечное или счетное множество точек разрыва первого рода;

2) если x – точка непрерывности $F_{\xi}(x)$, то

$$\exists\frac{dF_{\xi}(x)}{dx}\ \text{ и }\ \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}=0.$$

Примеры дискретных распределений *СВ*:

1) СВ имеет распределение Бернулли, если $\xi(\omega)\in\{0,1\}$,

$p_k=P\{\omega:\xi(\omega)=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1,\ 0<p<1,$ рис.6.1,

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ 1-p,\ 0<x\le 1,\\ 1,\ x>1,\end{cases}\ \text{рис. 6.2.}$$

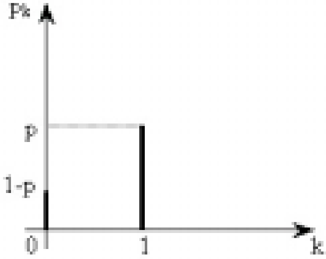

Рис. 6.1

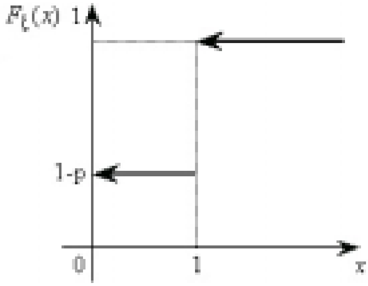

Рис.6.2

2) СВ $\xi(\omega)$ имеет биномиальное распределение, если

$$\xi(\omega) \in \{0, 1, 2, ..., n\},$$

$$p_k = P\{\omega : \xi(\omega) = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, ..., n, \ 0 < p < 1,$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{l} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ l < x \le l+1, \\ 1, x > n, \\ 0, x \le 0, \end{cases}$$

отметим, что, как следует из формулы Бернулли, число появлений события в n независимых испытаниях Бернулли имеет биномиальное распределение;

3) СВ $\xi(\omega)$ имеет геометрическое распределение, если

$$\xi(\omega) \in \{0, 1, 2, ...k, ...\},$$

$$p_k = P\{\omega : \xi(\omega) = k\} = p(1-p)^k, k = 0, 1, 2, ..., 0 < p < 1,$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{l} p(1-p)^k, l < x \le l+1 \end{cases} = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 1-(1-p)^l, l < x \le l+1; \end{cases}$$

4) *СВ* î(ù) имеет распределение Пуассона с параметром ë > 0, если

$$\hat{\imath}(\grave{u}) \in \{0, 1, 2, \ldots k, \ldots\},$$

$$p_k = P\{\grave{u} : \hat{\imath}(\grave{u}) = k\} = \frac{\ddot{e}^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ рис. 6.3.},$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{l} \dfrac{\lambda^k}{k!}, l < x \le l+1, \end{cases} \text{ рис. 6.4.;}$$

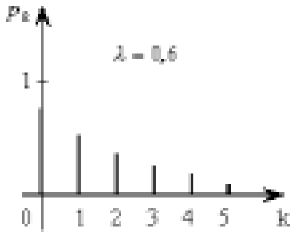

Рис. 6.3

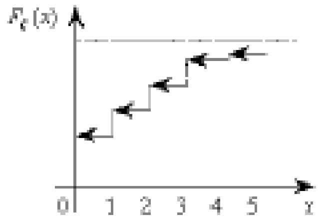

Рис. 6.4

Дадим интерпретацию некоторых из этих СВ. Предположим, что студент идет сдавать зачет. На некоторые вопросы по сдаваемому предмету он знает ответы, а на остальные – нет. Поэтому событие, заключающееся в том, что он получит зачет, является случайным. Определим СВ следующим образом: если зачет сдан, то $\xi = 1$, если нет, то $\xi = 0$. Таким образом, определенная СВ является бернуллиевой, параметр p в том случае соответствует относительному числу вопросов, на которые студент знает ответ. Пусть студенту необходимо сдать n зачетов и он делает по одной попытке получить каждый из этих зачетов. Определим СВ ξ как число зачетов, которые получит студент. Такая СВ будет биномиальной. Число студентов, которых успел выслушать преподаватель на зачете за фиксированный интервал времени, а также число заданий, которые выполняет ЭВМ за фиксированный промежуток времени, являются СВ, распределенными по закону Пуассона с соответственно определенными параметрами λ.

Пример 6.4. Производятся последовательные испытания трех приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Составить таблицу распределения и найти ф.р. случайного числа испытанных приборов, если вероятность надежности каждого прибора равна $q = 1 - p = 0,9$.

Решение. СВ ξ, описывающая число испытанных приборов, имеет распределение вероятностей

$$p_k = P\{\xi = k\} = \begin{cases} p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \\ (1-p)^{k-1}, k = 3, \end{cases}$$

поэтому таблица распределения имеет вид

k	1	2	3
p_k	0,1	0,9·0,1	$0,9^2$·0,1

$$\text{а ф.р. } F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 1, \\ \sum_{i=1}^{k} p_i, k < x \le k+1, \\ 1, x \ge 3. \end{cases}$$

II. Непрерывные СВ (СВ с абсолютно непрерывными ф.р.). В этом случае $F_\xi(x) -$ непрерывная функция и

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt.$$

Ясно, что

$$p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}$$

в точках существования производной. Функция $p_\xi(x)$ называется плотностью распределения вероятностей СВ $\xi(\omega)$. Она обладает следующими свойствами:

1) $p_\xi(x) \geq 0$ (как производная неубывающей функции);

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$ условие нормировки, (следует из свойства ф.р. $F_\xi(+\infty) = 1)$;

3) кроме того,

$$P\{\omega : x_1 < \xi(\omega) \leq x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} p_\xi(t)dt.$$

Рассмотрим примеры непрерывных СВ:

1) СВ $\xi(\omega)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, если

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}, \text{ рис. 6.5,}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x \leq b, \\ 1, x > b; \end{cases} \text{ рис. 6.6,}$$

2) СВ $\xi(\omega)$ имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$, если

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}, \text{ рис. 6.7,}$$

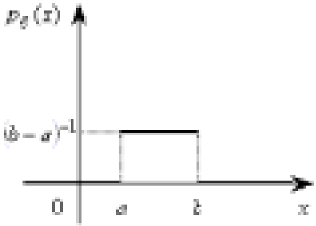

Рис. 6.5

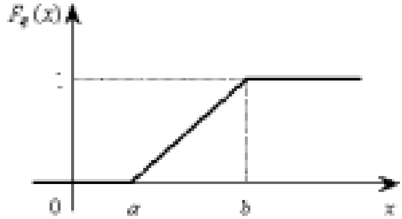

Рис. 6.6

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, x\geq 0\end{cases}, \text{ рис. 6.8;}$$

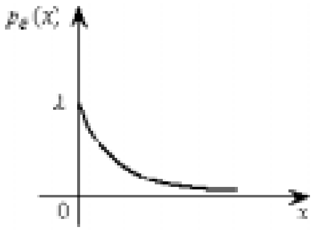

Рис. 6.7

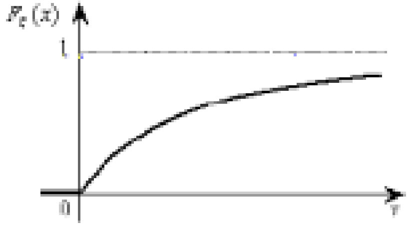

Рис. 6.8

3) СВ $\xi(\omega)$ имеет нормальное распределение с параметрами a, σ^2, $\xi(\omega) \sim N(a, \sigma^2)$, если

$$p_{\xi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ рис. 6.9,}$$

$$F_{\xi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt, \text{ рис. 6.10;}$$

4) СВ $\xi(\omega)$ имеет распределение Коши с параметром $a>0$, если

$$p_{\xi}(x)=\frac{a}{\pi(a^2+x^2)},\ F_{\xi}(x)=\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{a}.$$

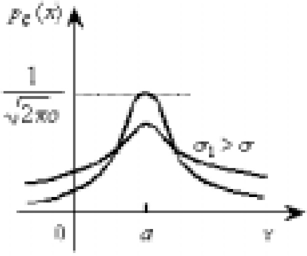

Рис. 6.9

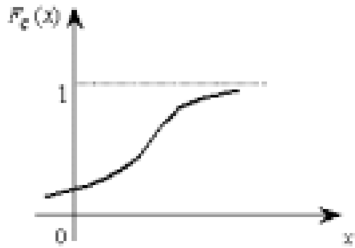

Рис. 6.10

В частности, интервалы времени между соседними автомобилями на дорогах являются экспоненциально распределенными СВ с соответствующими параметрами $\lambda > 0$. Если $\xi(\omega)$ – СВ, имеющая экспоненциальное распределение, то $\forall \hat{o} \geq 0$

$$P(\xi > x+\tau / \xi > \tau) = \frac{P(\xi > x+\tau, \xi > \tau)}{P(\xi > \tau)} = \frac{P(\xi > x+\tau)}{P(\xi > \tau)} =$$

$$= \frac{1-P(\xi \leq x+\tau)}{1-P(\xi \leq \tau)} = \frac{1-1-e^{-\lambda(x+\tau)}}{1-1-e^{-\lambda\tau}} = e^{-\lambda x} = 1-F_{\xi}(x) =$$

$$= 1-P(\xi \leq x) = P(\xi > x) \Rightarrow P(\xi - \tau \leq x / \xi > \tau) = P(\xi \leq x),$$

следовательно, см. рис. 6.11., СВ $\xi - \tau$ имеет то же самое экспоненциальное распределение, как и СВ ξ .

Рис. 6.11

Нормальное распределение является наиболее широко применяемым на практике непрерывным распределением. В частности, оно применяется при моделировании броуновского движения, см. также п. 12.

Пример 6.5. Проверим, что функция

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

является плотностью распределения вероятностей.

Решение. Ясно, что $p(x) > 0$. Нужно еще проверить условие нормировки. Это можно сделать несколькими способами:

а) пользуясь равенством $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, где $\Gamma(k) = \int\limits_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция; б) возводя интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ в квадрат и переходя в двойном интеграле к полярным координатам.

Рассмотрим первый способ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} = t\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Второй способ дает:

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx\right]^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy =$$

$$= [x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = 1,$$

откуда следует тот же самый результат. Плотность $p(x)$ называют плотностью стандартного нормального распределения, у которого $a = 0$, $\sigma = 1$.

III. СВ с сингулярными ф.р. Кроме дискретных и непрерывных СВ существуют другие СВ. В частности, кроме величин, которые на одних интервалах являются непрерывными, а на других дискретными, существуют величины, не являющиеся ни на одном интервале ни дискретными, ни непрерывными. К таким СВ относятся, например, те, ф.р. которых непрерывные, но при этом возрастают только на множестве лебеговской меры нуль. В качестве примера можно привести величину, ф.р. которой – известная кривая Кантора. Кривая («лестница») Кантора строится следующим образом, рис. 6.12:

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2}, x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \; F_\xi(x) = \frac{1}{4}, x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], \; F_\xi(x) = \frac{3}{4}, x \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right],$$

...; и т. д. до бесконечности. В итоге ф.р. $F_\xi(x)$ оказывается определенной на счетном множестве интервалов, которые являются интервалами смежности некоторого нигде не плотного совершенного множества меры нуль. На этом множестве доопределим функцию $F_\xi(x)$ по непрерывности**.** Величина ξ с таким образом определенной ф.р. не дискретна, поскольку ее ф.р. непрерывна, но в то же время не абсолютно непрерывна, т.к. ее ф.р., не является интегралом от своей производной.

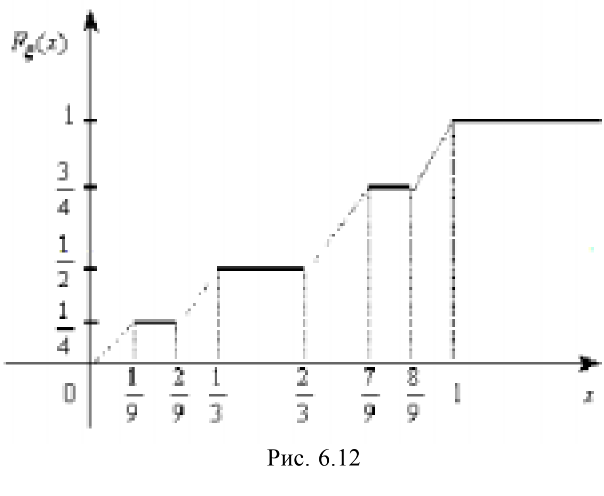

Рис. 6.12

Теорема Лебега. Любую ф.р. $F_\xi(x)$ однозначно можно представить в виде (разложение Лебега)

$$F_\xi(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x),$$

где $a_i \geq 0, i = \overline{1,3}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1, F_1(x), F_2(x), F_3(x)$ – дискретная, абсолютно непрерывная и сингулярная ф.р. соответственно.

Покажем, что если $P\{\omega : \xi(\omega) = \bar{x}\} = 0$, то $\bar{x}$ является точкой непрерывности функции $F_\xi(x)$. Действительно, $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{\omega : \bar{x} - \varepsilon \leq \xi(\omega) \leq \bar{x} + \varepsilon\} \geq F_\xi(\bar{x} + \varepsilon) - F_\xi(\bar{x} - \varepsilon) \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$P\{\omega : \xi(\omega) = \bar{x}\} = \lim_{\varepsilon \to 0} P\{\bar{x} - \varepsilon \leq \xi(\omega) \leq \bar{x} + \varepsilon\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[F_\xi(\bar{x} + \varepsilon) - F_\xi(\bar{x} - \varepsilon)\right] = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если x – точка непрерывности функции $F_\xi(x)$, то $P\{\omega : \xi(\omega) = \bar{x}\} = 0$.

Пусть $\xi(\omega)$ – СВ с абсолютно непрерывной ф.р. $F_\xi(x)$ и плотностью распределения $p_\xi(x)$, $y = f(x)$ – непрерывная возрастающая функция. Тогда для СВ $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$

$$F_\eta(y) = P\{\eta \leq y\} = P\{f(\xi) \leq y\} = P\{\xi \leq f^{-1}(y)\} = F_\xi(f^{-1}(y)),$$

и если, кроме того, $f(x)$ – дифференцируемая функция, то

$$p_\eta(y) = p_\xi\left(f^{-1}(y)\right)\frac{df^{-1}(y)}{dy}.$$

Если же функция $f(x)$ – убывающая, то

$$F_\eta(y) = 1 - F_\xi(f^{-1}(y)),\ p_\eta(y) = -p_\xi(f^{-1}(y))\frac{df^{-1}(y)}{dy}.$$

Пример 6.6. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения СВ $\eta = \sqrt{\xi}$.

Решение:

$$F_\eta(y)=P\{\sqrt{\xi}\le y\}=P\{\xi\le y^2\}=1-e^{-\lambda y^2},$$

$$p_\eta(y)=F_\eta'(y)=2\lambda y e^{-\lambda y^2},\ y\ge 0.$$

Пример 6.7. Пусть СВ ξ равномерно распределена на отрезке [0,1]. Найти ф.р. и плотности распределения СВ:

а) $\eta_1=\xi^2$, б) $\eta_2=\sqrt{\xi},$ в) $\eta_3=sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)$.

Решение:

а) $F_{\eta_1}(x)=P\{\xi^2\le x\}=P\{\xi\le\sqrt{x}\}=\sqrt{x},\ 0\le x\le 1,,$

$p_{\eta_1}(x)=F_{\eta_1}'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ 0<x\le 1;$

б) $F_{\eta_2}(x)=P\{\sqrt{\xi}\le x\}=P\{\xi\le x^2\}=x^2,$

$p_{\eta_2}(x)=F_{\eta_2}'(x)=2x,\ 0\le x\le 1;$

в) $F_{\eta_3}(x)=P\left\{sin^2\left(\dfrac{\pi\xi}{2}\right)\le x\right\}=P\left\{sin\left(\dfrac{\pi\xi}{2}\right)\le\sqrt{x}\right\}=$

$=P\left\{\xi\le\dfrac{2}{\pi}arcsin\sqrt{x}\right\},0\le x\le 1,$

$$p_{\eta_3}(x)=F_{\eta_3}'(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},0<x<1.$$

Пример 6.8. Найти плотности распределения СВ: а) $\eta_1=\xi^3$, б) $\eta_2=|\xi|$, если известна плотность распределения СВ ξ.

Решение:

а) $p_{\eta_1}(y) = p_{\hat{\imath}}(\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{y})' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y^2}\,p_{\hat{\imath}}(\sqrt[3]{y});$

б) $F_{\eta_2}(y) = P(\eta_2 \le y) = P(-y \le \hat{\imath} \le y) = \int\limits_{-y}^{y} p_{\hat{\imath}}(x)dx =$

$$= \int\limits_{0}^{y} [p_{\hat{\imath}}(x) + p_{\hat{\imath}}(-x)]dx, \;\; y > 0,$$

откуда следует, что $p_{\eta_2}(y) = p_{\hat{\imath}}(y) + p_{\hat{\imath}}(-y), \;\; y > 0,$ согласно определению плотности.

Пример 6. . При проведении математических экспериментов на ЭВМ поведение построенной модели многократно наблюдают при различных случайных исходных условиях. Такой способ исследования называется методом статистических испытаний, или методом «Монте-Карло». При этом возникает задача получения случайных чисел, распределенных по любому какому угодно заданному закону. В ЭВМ эта задача решается при помощи функционального преобразования случайных чисел, распределенных равномерно в интервале [0,1], методы получения которых хорошо разработаны. Это делается следующим образом.

Пусть СВ $\hat{\imath}(\grave{u})$ равномерно распределена на интервале [0,1]. Надо найти такое преобразование $f(x)$, чтобы СВ $\eta(\omega) = f(\hat{\imath}(\omega))$ имела заданную ф.р. $F(y)$. Т.к. $0 \le F(y) \le 1$, выберем $f(x)$ в виде $f(x) = F^{-1}(x)$. Рассмотрим СВ $\eta(\omega) = F^{-1}(\hat{\imath}(\omega))$. Для нее

$$p_{\eta}(y) = p_{\hat{\imath}}(F(y))\left|\frac{\partial F(y)}{\partial y}\right|,$$

но т.к. $\hat{\imath}(\grave{u})$ равномерно распределена на интервале [0,1], то $p_{\hat{\imath}}(F(y)) = 1$, и мы получаем

$$p_{\eta}(y) = \frac{\partial F(y)}{\partial y}$$

(знак модуля здесь можно снять, т.к. $F(y)$ – неубывающая функция). Таким образом, $F_\eta(y) = F(y)$, что и требовалось доказать.

Модой дискретной СВ называется ее наиболее вероятное значение, модой непрерывной СВ ξ – значение аргумента x, при котором ее плотность распределения $p_\xi(x)$ максимальна. Медианой СВ ξ называется значение аргумента x, при котором $F_\xi(x) = 0{,}5$.

Задачи

6.1. Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$ – σ-алгебра борелевских множеств отрезка $[0,1]$, P – мера Лебега, а

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 1, \omega \in, \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ 2, \omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Найти $F_\xi(x)$.

6.2. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ то же, что в задаче 6.1. Найти ф.р. и плотности распределения (если они существуют) следующих СВ:

а) $\xi(\omega) = \begin{cases} \omega^2, \ \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2, \ \omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$ б) $\xi(\omega) = \begin{cases} sin\frac{\pi}{2}\omega, \ \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 2, \ \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$

в) $\xi(\omega) = \omega^3$, г) $\xi(\omega) = e^\omega$, д) $\eta(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)$, если $\xi_1(\omega)=\begin{cases}1, \omega\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\\ 2, \omega\in\left[\dfrac{1}{2},1\right],\end{cases}$ $\xi_2(\omega)=\omega^4$.

6.3. Плотность распределения вероятностей СВ ξ имеет вид

$$p_\xi(x)=\begin{cases}Cx^{-\frac{3}{2}},\ x\ge 1,\\ 0,\ x<1.\end{cases}$$

Найти: а) константу С, б) плотность распределения вероятностей СВ $\eta=\dfrac{1}{\xi}$, в) $P\{4<\eta\le 9\}$.

6.4. Дана плотность распределения СВ

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x<0,\ x>2,\\ a\left(4x-x^3\right), 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Найти a, $F_\xi(x)$, $P\{-2<\xi\le 1\}$.

6.5. СВ ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Найти плотности распределения СВ:

а) $\eta_1=\xi^2$; б) $\eta_2=\dfrac{1}{\lambda}\ln\hat{\imath}$; в) $\eta_3=1-e^{-\lambda\xi}$; г) $\eta_4=e^{-\xi}$.

6.6. СВ ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти плотности распределения СВ:

а) $\eta_1=2\xi+1$; б) $\eta_2=-\ln(1-\hat{\imath})$; в) $\eta_3=tg\left(\pi\left(\xi-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

6.7. СВ ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a=0,\sigma^2$. Найти плотность распределения СВ $\eta=\dfrac{1}{\xi}$.

6.8. Показать, что если СВ ξ имеет абсолютно непрерывную ф.р. $F_\xi(x)$, то СВ $\eta = F_\xi(\xi)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

6.9. Доказать, что непрерывная ф.р. СВ является равномерно непрерывной.

6.10. Доказать, что для любой ф.р. справедливы соотношения:

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty} x\int_x^\infty \frac{dF_\xi(y)}{y} = 0; \quad \text{в) } \lim_{x\to-0} x\int_{-\infty}^x \frac{dF_\xi(y)}{y} = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{\chi\to-\infty} x\int_{-\infty}^x \frac{dF_\xi(y)}{y} = 0; \quad \text{г) } \lim_{x\to+0} x\int_x^\infty \frac{dF_\xi(y)}{y} = 0.$$

6.11. Доказать, что для любой абсолютно непрерывной ф.р. $F_\xi(x)$. и для любых натуральных n и k

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\xi^k(x)dF_\xi^n(x) = \frac{n}{n+k}.$$

6.12. Дискретная СВ ξ принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$. Определим случайную величину $\eta = min\{\xi, a\}$, где $x_1 \le a \le x_n$. Найти распределение СВ η.

6.13. В ячейке ЭВМ записано n-разрядное двоичное число; каждый знак этого числа, независимо от остальных, принимает с равной вероятностью значение 0 или 1. СВ ξ – число знаков «1» в записи двоичного числа. Найти распределение СВ ξ и вероятности $P\{\xi \ge m\}$, $P\{\xi < m\}$.

6.14. Времена между двумя сбоями ЭВМ распределены по показательному закону с параметром λ. Решение определенной задачи требует безотказной работы машины в течении времени τ. Если за время τ произошел сбой, то задачу приходится решать заново. Сбой обнаруживается только через время τ после начала решения задачи. Рассматривается СВ ξ – время, за которое задача будет решена. Найти ее закон распределения.

6.15. При работе ЭВМ в случайные моменты возникают неисправности. Время T работы ЭВМ до первой неисправности распределено по показательному закону с параметром λ. При возникновении неисправности она мгновенно обнаруживается, и ЭВМ поступает в ремонт. Ремонт продолжается время t_0, после чего ЭВМ снова включается в работу. Найти плотность $p_\xi(t)$ и ф. р. $F_\xi(x)$ промежутка времени ξ между двумя соседними неисправностями. Найти вероятность $P\{\xi > 2t_0\}$.

6.16. СВ ξ распределена по нормальному закону с параметром $a = 0$. Задан интервал $(\alpha, \beta]$, не включающий начала координат. При каком значении σ вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $(\alpha, \beta]$ достигает максимума?

6.17. СВ ξ имеет распределение Пуассона. Найти вероятности случайных событий: A={ ξ принимает четное значение}, B={ ξ принимает нечетное значение}.

6.18. Интервалы времени безотказной работы ЭВМ имеют показательное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{T}$. Найти вероятность безотказной работы ЭВМ в течении времени $2T$.

6.19. Плотность распределения СВ равна

$$p_\xi(x) = ax^2 e^{-kx},\ k > 0,\ 0 \le x < +\infty.$$

Найти: а) коэффициент a; б) ф.р. этой СВ; в) вероятность попадания этой СВ в интервал $\left(0, \frac{1}{k}\right]$.

6.20. Пусть $\xi \sim N(0,1)$. Что больше: $P\{-0{,}6 < \xi \le -0{,}1\}$ или $P\{1 < \xi \le 2\}$?

6.21. Пусть $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, $f(x)$ – действительная, ограниченная на всей прямой, непрерывная функция,

$$H(a,\sigma^2)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_\xi(x)dx.$$

Доказать, что: а) $\lim\limits_{\sigma\to 0} H(a,\sigma^2)=f(a)$; б) $\dfrac{\partial H}{\partial\sigma^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 H}{\partial a^2}$.

6.22. Доказать, что линейная функция СВ, распределенной по нормальному закону, имеет также нормальное распределение.

6.23. Показать, что функция

$$p(x)=\frac{\lambda}{n!}(x\lambda)^n e^{-\lambda x},\ \lambda, x>0,$$

является плотностью вероятности некоторой СВ ξ и найти вероятность попадания СВ ξ в интервал $(0,1]$ при $n=2$.

6.24. СВ ξ имеет ф.р. $F_\xi(x)$. Найти ф.р. СВ $\eta=\frac{1}{2}(\xi+|\xi|)$.

6.25. Ф.р. $F_\xi(x)$ непрерывная в нуле. Найти распределение СВ

$$\eta=\begin{cases}\dfrac{\xi}{|\xi|},\ \xi\neq 0,\\ 1,\ \xi=0.\end{cases}$$

6.26. Пусть ξ – СВ с симметричным распределением, B – симметричное относительно нуля борелевское множество на прямой. Допустим

$$\eta=\begin{cases}\xi,\ \xi\in \mathrm{B},\\ -\xi,\ \xi\notin \mathrm{B}.\end{cases}$$

Доказать, что СВ ξ и η одинаково распределены.

6.27. Дискретная СВ ξ характеризуется законом распределения

ξ	-1	0	1
P	0,4	0,3	0,3

Найти закон распределения СВ $\eta = \xi^2 + 1,\ \theta = |\xi|$.

6.28. Ф.р. Вейбулла

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^m},\ x \geq 0, \\ 0, x < 0, \end{cases}$$

в некоторых случаях характеризует время службы элементов электронной аппаратуры ξ. Найти $p_\xi(x)$, моду СВ ξ.

6.29. Случайное время простоя радиоэлектронной аппаратуры в некоторых случаях имеет плотность распределения

$$p_\xi(x) = \frac{M}{\sqrt{2\pi}x\sigma} e^{\frac{-(\lg x - \lg x_0)^2}{2\sigma^2}},$$

где $M = \lg e \approx 0,4343$ (логарифмический нормальный закон распределения). Найти:

а) модуль распределения при $x_0 = 1,\ \sigma = \sqrt{5M}$; б) ф.р. $F_\xi(x)$.

6.30. СВ R – расстояние от места попадания до центра мишени – распределена по закону Релея, т.е. ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} axe^{-\alpha^2 x^2}, x > 0, \\ 0, x \leq 0. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) вероятность того, что R окажется меньше, чем мода.

6.31. На электронное реле воздействует случайное напряжение, распределенное по закону Релея с параметрами

$$a = \frac{1}{\sigma^2},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}.$$

Какова вероятность схемы сработать, если электронное реле срабатывает каждый раз, когда напряжение на его входе больше 2 В?

6.32. Случайные ошибки измерений дальности до неподвижной цели подчинены нормальному закону с параметрами $a = 100$ м и σ =10 м. Определить вероятность того, что измеренное значение дальности отклонится от действительного не больше, чем на 15 м.

6.33. Закон распределения ошибок при измерении радиуса круга r нормальный с параметрами a=1000, σ^2 = 0,25. Найти закон распределения ошибок при вычислении длины окружности, площади круга.

6.34. В счетчике Гейгера-Мюллера для подсчета космических частиц частица, попавшая в счетчик, вызывает разряд, длящийся время τ. Попавшие в этот промежуток времени в счетчик новые частицы счетчиком не регистрируются. Считая, что распределение числа частиц, попавших в счетчик, подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность попадания в счетчик k частиц за время t равна

$$q_k(t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at},\ k = 0, 1, 2, ...,$$

найти вероятность того, что счетчик за время t сосчитает все попавшие в него частицы.

6.35. Закон ошибок при наблюдении температуры выражен по шкале Фаренгейта формулой для плотности вероятности

$$p(t) = \sqrt{\frac{1{,}2}{\pi}} e^{-1{,}2(t-23)^2}.$$

Написать этот закон, приспособив его к шкале Цельсия.

6.36. Угол сноса самолета α определяется формулой

$$\alpha = arccos\left(\frac{u}{v} sin\beta\right),$$

где β – угол ветра – равномерно распределен в интервале $[-\pi,\pi]$, u – скорость ветра, v – воздушная скорость самолета. Найти плотность вероятности угла сноса самолета, если u=20 м/сек, v=1200 км/ч.

6.37. Построить закон распределения и ф.р. числа попадания в корзину при двух бросках, если вероятность попадания при каждом броске 0,4.

6.38. В группе из 5 изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое вынутое проверяют. Построить закон распределения и ф.р. числа проверенных изделий.

6.39. Из партии 15 изделий, среди которых имеются два бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить закон распределения и ф.р. числа бракованных изделий.

6.40. Независимые опыты продолжаются до первого положительного исхода, после чего они прекращаются. Найти для случайного числа опытов: а) ряд распределения; б) наивероятнейшее число опытов, если вероятность успешного исхода в каждом опыте равна 0,5.

6.41. Имеется 6 ключей, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Построить ф.р. числа попыток.

6.42. На пути движения автомобиля шесть светофоров, каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью 0,5. Составить ряд распределения и построить ф.р. числа светофоров, пройденным автомобилем до первой остановки.

6.43. Известно, что при определенных параметрах динамических систем может наступить резонанс. Пусть параметр ξ является СВ, следующей нормальному закону $N(a, \sigma^2)$. Найти вероятность того, что значение параметра удалено от точек резонанса более чем на расстоянии d, где $d \le \frac{l}{2}$, а точки резонанса равны nl, $n \in Z$.

6.44. Бюджетная прямая спроса потребителя на два товара X и Y подвергается изменению вследствие изменения цены на товар Y. Предполагая, что изменение зависит от угла наклона α, равномерно распределенного в промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, найти ф.р. и плотность распределения величины полного расходования дохода потребителя на товар Y, если бюджетная прямая проходит через точку B (1, 0).

6.45.* Автомобиль может двигаться по шоссе с произвольной скоростью v, $0 < v \le V$. Чем быстрее движется автомобиль, тем больше вероятность того, что он будет задержан инспектором милиции. Среднее время задержки – τ. Инспекторы на пути следования расставлены случайным образом, и при этом на единицу длины пути приходится случайное число инспекторов, следующее закону Пуассона с параметром λ. Если зависимость вероятности задержки от скорости движения автомобиля линейная, а именно

$$P(v) = \frac{v}{V},$$

определить рациональную скорость движения автомобиля, при которой он пройдет путь S в среднем за минимальное время.

6.46.* Пусть $\eta(\omega) = \xi^2(\omega)$ является СВ. Показать, что $\xi(\omega)$ не обязана быть СВ, привести пример.

6.47.* Обязана ли быть $\xi(\omega)$ случайной величиной, если случайной величиной является:

а) $|\xi(\omega)|$, б) $\cos(\xi(\omega))$, в) $e^{\xi(\omega)}$, г) $(\xi(\omega))^{\xi(\omega)}$, д) $[\xi(\omega)]$,

где $[\cdot]$ – целая часть?

6.48.* ЭВМ, работающая до момента t, может давать сбой в течении интервала времени $[t, t+\Delta t]$ с вероятностью

$$P(t, \Delta t) = p(t)\Delta t + 0(\Delta t),$$

где $p(t) > 0$. Найти ф.р. плотность распределения интервала функционирования ЭВМ без сбоя и вероятность сбоя ЭВМ в течение заданного времени $[t_1, t_2]$, если она работает без сбоя до момента t_1.

7. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. УСЛОВНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) определены n измеримых функций СВ $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$. Совокупность этих функций $\xi(\omega)$ определяет отображение

$(\Omega, \mathcal{F}) \to (R^n, \mathcal{B}^n)$, где R^n – n-мерное действительное пространство, $\mathcal{B}_n$ – система борелевских множеств на R^n. Такая совокупность $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ называется многомерной СВ (или случайным вектором).

Функция n аргументов

$$F_\xi(x) = F_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= P\{\omega : \xi_1(\omega) \le x_1, \xi_2(\omega) \le x_2, \ldots, \xi_n(\omega) \le x_n\}$$

называется n-мерной ф.р. n-мерной СВ.

Пример 7.1. Пусть $\xi_1(\omega)$ – СВ, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$, $\xi_2(\omega) = \xi_1^2(\omega)$. Тогда $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ – двумерная СВ. Найдем ее ф.р.

$$F_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = P\{\omega : \xi_1(\omega) \le x_1, \xi_2(\omega) \le x_2\} =$$
$$= P\left\{\omega : \xi_1(\omega) \le x_1, \xi_1^2(\omega) \le x_2\right\}.$$

При $x_1 < 0, x_2 < 0$ это выражение равно 0, а при $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$$F_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = P\left\{\omega : \xi_1(\omega) \le x_1, \xi_1(\omega) \le \sqrt{x_2}\right\} =$$
$$= P\left\{\omega : \xi_1(\omega) \le \min(x_1, \sqrt{x_2})\right\} =$$
$$= \begin{cases} \min\left(x_1, \sqrt{x_2}\right), & \text{если } \min\left(x_1, \sqrt{x_2}\right) \le 1, \\ 1, & \text{если } \min\left(x_1, \sqrt{x_2}\right) > 1, \end{cases}$$

Ф.р. многомерной СВ имеет следующие свойства:

1) $F_\xi(x)$ является неубывающей по всем аргументам;

2) $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0$;

3) $\lim\limits_{x_k \to +\infty,\, k=\overline{1,n}} F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = 1$;

4) $F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна справа по всем аргументам;

5) условие согласованности:

$$\lim_{x_k \to +\infty} F_{\xi_1\, \xi_{k-1}\, \xi_k\, \xi_{k+1} \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= F_{\xi_1\, \xi_{k-1}\, \xi_{k+1} \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) .$$

Ф.р. меньшей размерности, которая получается из ф.р. большей размерности, если применить для нее условие согласованности, называется маргинальной.

6) Отметим, что для того, чтобы некоторая функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ была ф.р. n -мерной CB , недостаточно, чтобы для нее были выполнены условия 1) – 5). Необходимо также выполнение еще одного условия. Пусть

$$a_k < b_k,\ A_k = \{x : a_k < x \le b_k\},\ k = \overline{1, n}.$$

Нетрудно видеть, что

$$P\{\ \omega : \xi_1(\omega) \le x_1, \ldots, \xi_{k-1}(\omega) \le x_{k-1}, a_k < \xi_k(\omega) \le b_k,$$

$$\xi_{k+1}(\omega) \le x_{k+1}, \ldots, \xi_n(\omega) \le x_n\ \} =$$

$$= F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) -$$

$$- F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \Delta_k\ F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n),$$

а также

$$P\{\ \omega : \xi_k(\omega) \in A_k, k = \overline{1, n}\ \} = \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n\ F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) .$$

Отсюда ясно, что для многомерной ф.р. должно выполняться условие $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n\ F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) \ge 0$.

Это условие не следует из свойств 1) – 5). Покажем это на примере.

Пример 7.2. Пусть $n = 2$,

$$F_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, x_1 < 0, x_2 < 0, x_1 + x_2 < 1, \\ 1, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для такой функции, что легко проверить, выполняются свойства 1) – 5). Пусть

$$A_k = \left\{\omega : \frac{1}{3} < \xi_k(\omega) \le 1\right\},$$

тогда

$$P\{\grave{u} : \hat{\imath}_k(\grave{u}) \in A_k, k = 1, 2\} = \Delta_1\Delta_2\, F_{\hat{\imath}_1\, \hat{\imath}_2}(x_1, x_2) =$$

$$= \Delta_1\left[F_{\xi_1\,\xi_2}(x_1, 1) - F_{\xi_1\,\xi_2}\left(x_1, \frac{1}{3}\right)\right] = F_{\xi_1\,\xi_2}(1, 1) - F_{\xi_1\,\xi_2}\left(\frac{1}{3}, 1\right) -$$

$$- F_{\xi_1\,\xi_2}\left(1, \frac{1}{3}\right) + F_{\xi_1\xi_2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1.$$

Таким образом, получили, что если $F_{\xi_1\,\xi_2}(x_1, x_2)$ – ф.р., то найденная вероятность – отрицательная. Это невозможно, значит, выполнение условий 1) – 5) является недостаточным для того, чтобы $F_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)$ была ф.р.

Так же, как и в одномерном случае, $F_\xi(x)$ относится к дискретному типу, если каждая из СВ $\xi_k(\omega), k = \overline{1, n}$, принимает значения из счетного или конечного множества. Дискретную СВ $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega))$ удобно описывать распределением вероятностей

$$P_\xi(x) = P\{\omega : \xi_1(\omega) = x_1, \xi_2(\omega) = x_2, ..., \xi_n(\omega) = x_n\}, \quad \sum_x P_\xi(x) = 1,$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

$F_\xi(x)$ относится к абсолютно непрерывному типу распределения, если ее можно представить в виде

$$F_\xi(x) = F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1 \dots \xi_n}(t_1, \dots, t_n) dt_n .$$

Здесь $$\frac{\partial^n F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n),$$

$$p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n = 11.$$

Функция $p_\xi(x) = p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$, обладающая перечисленными свойствами, называется плотностью распределения вероятностей многомерной СВ $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ (совместной плотностью вероятностей величин $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$. Из условия согласованности для $F_\xi(x)$ вытекает следующее свойство для совместной плотности вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1 \dots \xi_{k-1} \xi_k \xi_{k+1} \dots \xi_n}(x_1, \dots x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_k =$$

$$= p_{\xi_1 \dots \xi_{k-1} \xi_{k+1} \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Плотность распределения, стоящая справа, называется маргинальной по отношению к исходной. Справедлива также следующая важная формула:

$$P\{\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in G\} = \int_G \dots \int p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots x_n) dx_1 \dots dx_n ,$$

например,

$$P\{\omega : \xi_1^2(\omega) + \xi_2^2(\omega) \leq Z\} = \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq Z} p_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 .$$

Рассмотрим примеры многомерных распределений.

1. Полиномиальное распределение имеет дискретная СВ

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)),$$

$$\text{где } \xi_k(\omega) \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}, \ \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) = N\ ,$$

$$P_\xi(x) = P_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = N! \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k^{x_k}}{x_k!}, \ 0 \le x_k \le N, \ k = \overline{1, n}, \ \sum_{k=1}^{n} x_k = N,$$

$$0 < p_k < 1, \ k = \overline{1, n}, \ \sum_{k=1}^{n} p_k = 11.$$

2. Многомерное нормальное распределение имеет СВ

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)),$$

непрерывного типа, для которой

$$p_{\text{î}}(x) = p_{\text{î}_1 \ldots \text{î}_n}(x_1, \ \ldots, \ x_n) =$$

$$= (2\text{ð})^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|G|} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} (x_i - a_i) g_{ij} (x_j - a_j) \right\},$$

где $G = \| g_{ij} \|_{n \times n}$ – неотрицательно определенная матрица, $|G|$ – ее определитель.

Пример 7.3. Пусть $(\xi(\omega), \eta(\omega))$ – двумерная СВ, имеющая нормальное распределение,

$$p_{\xi\,\eta}(x, y) = \frac{\sqrt{|G|}}{2\pi} exp\left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}^T G \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \right\}, G = \| g_{ik} \|_{2 \times 2}.$$

Найдем плотности распределения СВ $\text{î}(\text{ù})$ и $\eta(\omega)$:

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\,\eta}(x, y) dy =$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left|g_{11}-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{22}}\right|}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(g_{11}-\frac{(g_{12}+g_{21})^2}{4g_{22}}\right)(x-a)^2\right\},$$

$$p_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi\eta}(x,y)dy=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|g_{22}-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}}\right|}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(g_{22}-\frac{(g_{12}+g_{21})^2}{4g_{11}}\right)(y-b)^2\right\}.$$

Из условий нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}p_\eta(y)dy=1$$

для элементов матрицы G вытекает следующее требование:

$$g_{12}=g_{21},\ g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}=|G|>0,$$

т.е. матрица G должна быть симметричной и положительно определенной.

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, $A, B\in \mathsf{F}$. Если $P(B)>0$, то условная вероятность события A

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

существует и, как мы видели раньше, удовлетворяет всем свойствам вероятностной функции P. Если зафиксировать событие B, то эту условную вероятностную функцию событий $A\in \mathsf{F}$ можно рассматривать как элемент для построения нового вероятностного пространства $(\Omega, \mathsf{F}, P_B)$. Ранее была определена ф.р. $F_\xi(x)$ CB $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),...,\xi_n(\omega))$, рассматриваемой на вероятностном пространстве (Ω, F, P). Аналогично можно определить ф.р. СВ $\xi(\omega)$ на $(\Omega, \mathsf{F}, P_B)$. Эта функция называется условной ф.р.

СВ $\xi(\omega)$ при условии B и обозначается $F_\xi(x/B)$. Ее определяют следующим образом: пусть

$$A=\{\omega:\xi_1(\omega)\le x_1,\xi_2(\omega)\le x_2,\ldots,\xi_n(\omega)\le x_n\},$$

тогда

$$F_\xi(x/B)=F_{\xi_1\ldots\xi_n}(x_1,\ldots,x_n/B)=P(A/B).$$

Когда $F_\xi(x/B)$ – абсолютно непрерывная функция, то она имеет плотность распределения вероятностей

$$p_\xi(x/B)=\frac{\partial^n F_\xi(x/B)}{\partial x_1\ldots\partial x_n},$$

которая называется условной плотностью вероятностей СВ $\xi(\omega)$.

Часто в качестве условия B используется событие, связанное с тем, что некоторая СВ $\xi(\omega)$ приняла определенное значение. Допустим, что на (Ω, F, P) определена многомерная СВ $\eta(\omega)=(\eta_1(\omega),\eta_2(\omega),\ldots,\eta_m(\omega))$. Пусть

$$B_\xi=\{\omega:y\le\eta(\omega)\le y+\varepsilon\}=\{\omega:y_k\le\eta_k(\omega)\le y_k+\varepsilon,k=\overline{1,m}\}.$$

Если существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_\xi(x/B_\varepsilon)=F_\xi(x/y)$, то он называется условной ф.р. СВ î(ù) при условии $\eta(\omega)=y$.

$$F_\xi(x/y)=\lim_{\varepsilon\to 0}F_\xi(x/\hat{A}_\varepsilon)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}F_\xi(x/y\le\eta(\omega)\le y+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}P(\xi(\omega)\le x/y\le\eta(\omega)\le y+\varepsilon)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P(\xi(\omega)\le x,y\le\eta(\omega)\le y+\varepsilon)}{P(y\le\eta(\omega)\le y+\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_{\xi\eta}(x,y+\varepsilon)-F_{\xi\eta}(x,y)}{F_{\xi\eta}(\infty,y+\varepsilon)-F_{\xi\eta}(\infty,y)},$$

где $F_{\xi\eta}(x,y)$ – совместная $(n+m)$-мерная ф.р. СВ î(ù) и $\eta(\omega)$. Предположим, что $F_{\xi\eta}(x,y)$ – абсолютно непрерывная ф.р., тогда пользуясь ее определением и правилом Лопиталя будем иметь:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_{\xi\eta}(x, y+\varepsilon)-F_{\xi\eta}(x, y)}{F_{\xi\eta}(\infty, y+\varepsilon)-F_{\xi\eta}(\infty, y)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{y}^{y+\varepsilon}p_{\xi\eta}(t,\tau)d\tau dt}{\int\limits_{y}^{y+\varepsilon}p_{\eta}(\tau)d\tau}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{x}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int\limits_{y}^{y+\varepsilon}p_{\xi\eta}(t,\tau)d\tau}{\int\limits_{y}^{y+\varepsilon}p_{\eta}(\tau)d\tau}dt=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{p_{\xi\eta}(t, y)}{p_{\eta}(y)}dt=\int\limits_{-\infty}^{x}p_{\xi}(t/y)dt,$$

если предел под интегралом существует, т.к.

$$\left(\int\limits_{y}^{y+\varepsilon}p_{\xi\eta}(t,\tau)d\tau\right)'_{\varepsilon}=\int\limits_{y}^{y+\varepsilon}p'_{\xi\eta}(t,\tau)d\tau+(y+\varepsilon)'_{\varepsilon}\,p_{\xi\eta}(t, y+\varepsilon)-$$

$$-0\cdot p_{\xi\eta}(t, y)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}p_{\xi\eta}(t, y).$$

В этих формулах $\int\limits_{-\infty}^{x}dt$ означает n-мерный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{x_1}dt_1\ldots\int\limits_{-\infty}^{x_n}dt_n$.

Таким образом, $F_{\xi}(x/y)=\int\limits_{-\infty}^{x}p_{\xi}(t/y)dt$, где $p_{\xi}(x/y)$ условная плотность вероятностей, которая определяется равенством

$$p_{\xi}(x/y)=\frac{p_{\xi\eta}(x/y)}{p_{\eta}(y)}.$$

Из условия согласованности следует:

$$p_{\xi}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi\eta}(x;y)dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi}(x/y)p_{\eta}(y)dy,$$

$$p_\xi(x/y)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}=\frac{p_\xi(x)p_\eta(y/x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)p_\eta(y/x)dx}.$$

Формула $p_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x/y)p_\eta(y)dy$ называется формулой полной вероятности для плотностей распределения, а формула

$$p_\xi(x/y)=\frac{p_\xi(x)p_\eta(y/x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)p_\eta(y/x)dx} -$$

формулой Байеса для плотностей распределения.

Пример 7.4. Найдем условные плотности распределения вероятностей для СВ, рассматриваемых в предыдущем примере.

$$p_\xi(x/y)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}=\sqrt{\frac{g_{11}}{2\pi}}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{g_{11}}(x-a)+\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}(y-b)\right)^2\right\},$$

$$p_\eta(y/x)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(x)}=\sqrt{\frac{q_{22}}{2\pi}}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{g_{22}}y-b+\frac{g_{21}}{\sqrt{g_{22}}}(x-a)\right)^2\right\}.$$

Задачи

7.1. Дана плотность распределения вероятностей двумерной СВ

$$p_{\xi_1\xi_2}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}sin(x+y), 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2},\\ 0,\ \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти ф.р. $F_{\xi_1\xi_2}(x,y)$.

7.2. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

Найти коэффициент a, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$; определить вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в пределы квадрата с центром в начале координат, стороны которого параллельны осям координат и имеют длину, равную 2.

7.3. СВ (ξ_1,ξ_2) имеет плотность распределения

$$p_{\xi_1\xi_2}(x,y)=\frac{a}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти: а) величину a; б) ф.р. $F_{\xi_1\xi_2}(x,y)$; в) вероятность попадания (ξ_1,ξ_2) в квадрат, который ограничен прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=11$.

7.4. Случайный вектор $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ имеет плотность распределения

$$p_\xi(x,y,z)=\frac{a}{1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+x^2y^2z^2}.$$

Найти коэффициент a.

7.5. Случайный вектор $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ имеет равномерное распределение внутри цилиндра

$$p_{\xi_1\xi_2\xi_3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}(2\pi r^2h)^{-1}, x_1^2+x_2^2\le r^2, |x_3|\le h,\\ 0, x_1^2+x_2^2>r^2 \text{ или } |x_3|>h.\end{cases}$$

Определить плотности распределения отдельных компонентов ξ_1,ξ_2,ξ_3.

7.6. Пусть $0<a\le 1$ и

$$p(x,y)=\begin{cases}[(1+ax)(1+ay)-a]e^{x-y-axy}, x>0, y>0,\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказать, что $p(x,y)$ – двумерная плотность распределения вероятностей, и найти маргинальные плотности распределения.

7.7. Пусть $u(x)$ – нечетная непрерывная функция на прямой, которая принимает значения, равные нулю, вне интервала $[-1,1]$, причем

$$|u(x)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\,.$$

Доказать, что функция

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + u(x)u(y)$$

является двумерной плотностью распределения, отличающегося от нормального, но маргинальные распределения – нормальны.

7.8. Плотность распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ является равномерной внутри круга радиуса r с центром в начале координат. Написать ее выражение и выражения для плотностей распределения отдельных его компонент.

7.9. Студент и студентка договорились встретиться между 19 и 20 ч, условившись не ждать друг друга более 10 мин. Предположим, что моменты их прихода к месту встречи равномерно распределены между 19 и 20 ч. Найти вероятность встречи.

7.10. Закон распределения системы двух случайных величин (ξ, η) определяется таблицей

y_i z_i	20	40	60
10	3λ	2λ	λ
20	λ	4λ	2λ
30	0	2λ	5λ

Найти λ. Составить ряд распределения для каждой из случайных величин ξ и η.

7.11. Передаются два сообщения, каждое из которых может быть независимо от другого либо искажено, либо не искажено. Вероятность искажения для первого сообщения равна p_1, для второго – p_2. Рассматривается система двух случайных величин (ξ_1, ξ_2), определяемых следующим образом

$$\xi_1 = \begin{cases} 1, \text{если первое сообщение искажено,} \\ 0, \text{если первое сообщение не искажено,} \end{cases}$$

$$\xi_2 = \begin{cases} 1, \text{если второе сообщение искажено,} \\ 0, \text{если второе сообщение не искажено.} \end{cases}$$

Найти совместное распределение пары случайных величин (ξ_1, ξ_2). Найти совместную функцию распределения $F_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2)$.

7.12. На вероятностном пространстве (Ω, F, P) где $\Omega = [0,1]$ – σ-алгебра борелевских множеств, P – мера Лебега, заданы две СВ:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} -1, \ \omega \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 1, \ \omega \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}, \qquad \eta(\omega) = \begin{cases} 0, \ \omega \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \\ 1, \ \omega \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right] \end{cases}.$$

Найти условную ф.р. $F_\xi(x/y)$.

7.13. СВ (ξ, η) имеет равномерное распределение в круге $K = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$. Найти условную плотность распределения $p_\xi(x/y)$.

7.14. Совместная плотность распределения СВ ξ и η имеет вид

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 1, (x, y) \in G, \\ 0, (x, y) \notin G, \end{cases}$$

где
$$G = \left\{(x, y): 0 \le x \le 2, 0 < y < 1 - \frac{1}{2}x\right\}.$$

Найти условную плотность распределения $p_\eta(x/y)$.

7.15. Совместная плотность распределения СВ ξ и η определяется соотношением

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, x \ge 0, y \ge 0, \\ 0, x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Найти $p_\xi(x/y), p_\eta(y/x)$.

7.16. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ распределен равномерно внутри заштрихованного квадрата, рис. 7.1. Найти маргинальные и условные плотности распределения его компонент.

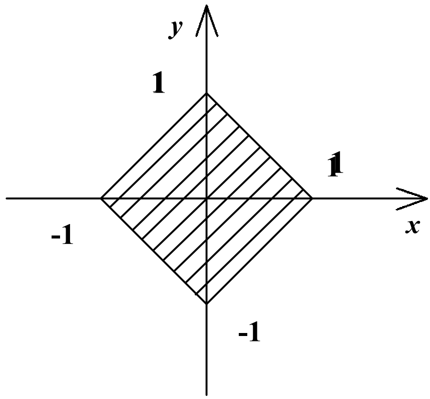

Рис. 7.1

7.17.* Каким условиям должны удовлетворять числа a, b, c для того, чтобы при подходящем выборе нормировочной константы A функция $Ae^{-(ax^2+2bx+c)}$ являлась плотностью ракспределения вероятностей на плоскости?

7.18* Состояние замкнутой компьютерной сети, состоящей из систем (такими системами могут быть сервера, компьютеры пользователей и т.д.), описывается вектором

$$k = (k_1, k_2, ..., k_n),\ \sum_{i=1}^{n} k_i = K,$$

где k_i – число заданий (запросов, сообщений) в i-й системе, K – число заданий, обрабатываемых в сети. Распределение вероятностей состояний сети имеет вид:

$$P(k) = G\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^{k_i},$$

где μ_i – интенсивность обработки заданий в i-й системе, e_i удовлетворяют системе уравнений

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} e_j p_{ji},\ i = \overline{1, n},$$

p_{ji} – вероятность перехода задания после обработки из j-й системы в i-ю, G – нормировочная константа, определяемая из условия нормировки

$$\sum_{k\in D(k)} P(k)=1, D(K)=\left\{k / k_i \geq 0,\ i=\overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n} k_i = K\right\}.$$

Найти вероятности состояний сети в случае:

а) $K=n=2, p_{12}=p_{21}=1$, $\mu_1=1, \mu_2=2$;

б) $K=n=3, p_{12}=p_{13}=1, p_{21}=p_{31}=1$, $\mu_1=100, \mu_2=\mu_3=1$.

8. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\xi_k(\omega), k=\overline{1,n},$ – СВ, определенные на вероятностном пространстве (Ω, F, P) $A_k=\{\omega : \xi_k(\omega)\in B_k\}$, где B_k – борелевское множество.

Определение. СВ $\xi_k(\omega), k=\overline{1,n},$ называются независимыми в совокупности, если, как бы ни выбирались борелевские множества B_k, $k=\overline{1,n},$ случайные события A_k, $k=\overline{1,n},$ являются независимыми в совокупности, т.е.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{j_i}\right)=\prod_{i=1}^{m} P(A_{j_i})\ \forall m\leq n,\ 1\leq j_1<j_2<\ldots<j_m\leq n.$$

Определение. СВ $\xi_k(\omega), k=\overline{1,n},$ называются независимыми парами, если $\forall\ 1\leq i<k\leq n$ и для любых борелевских множеств B_i и B_k события A_i и A_k являются независимыми, т.е. $P(A_i\cap A_k)=P(A_i)P(A_k)$.

Ясно, что СВ, независимые в совокупности, являются и независимыми парами.

Теорема. Пусть $\xi_k(\omega), k=\overline{1,n},$ – независимые в совокупности СВ, а $f_k(x), k=\overline{1,n},$ – борелевские функции. Тогда СВ $\eta_k(\omega)=f_k(\xi_k(\omega))$, $k=\overline{1,n},$ также независимы в совокупности.

Доказательство. Пусть $B_{j_1}, B_{j_2}, ..., B_{j_m}$ – борелевские множества $\forall\, m \le n$ и $1 \le j_1 < j_2 < ... < j_m \le n$. Тогда

$$P\left\{\omega : f_{j_k}\left(\xi_{jk}(\omega)\right) \in B_{j_k,}\ k = \overline{1,m}\right\} = P\left\{\omega : \xi_{j_k}(\omega) \in f_{j_k}^{-1}\left(B_{j_k}\right),\ k = \overline{1,\, m}\right\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} P\left\{\omega : \xi_{j_k}(\omega) \in f_{j_k}^{-1}\left(B_{j_k}\right)\right\} = \prod_{k=1}^{m} P\left\{\omega : f_{j_k}\left(\xi_{j_k}(\omega)\right) \in B_{j_k}\right\}.$$

Приведем два критерия независимости СВ в совокупности.

Теорема. Для того, чтобы СВ $\xi_k(\omega), k = \overline{1, n},$ были независимыми в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ x_k, k = \overline{1, n},$

$$F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, ..., x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x_k).$$

Если $F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, ..., x_n)$ – абсолютно непрерывная функция, то имеет место следующее утверждение.

Теорема. Для того, чтобы СВ $\xi_k(\omega), k = \overline{1, n},$ были независимыми в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы

$$p_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, ..., x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_{\xi_k}(x_k).$$

Доказательство следует из предыдущей теоремы и определения абсолютно непрерывной ф.р. Докажем, например, необходимость

$$F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1 \ldots \xi_n}(t_1, ..., t_n) dt_n = \prod_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x_k) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_k} p_{\xi_k}(t_k) dt_k = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{k=1}^{n} p_{\xi_k}(t_k) dt_k.$$

Поскольку это выполняется $\forall x_1, x_2, ..., x_n,$ то отсюда следует, что

$$p_{\xi_1 \ldots \xi_n}(t_1, ..., t_n) = \prod_{k=1}^{n} p_{\xi_k}(t_k).$$

Отметим, что из приведенных выше теорем следует, что если $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ – независимые СВ, то

$$F_{\xi}(x/y) = F_{\xi}(x),\; p_{\xi}(x/y) = p_{\xi}(x),$$

т.е. условная ф.р. и плотность распределения совпадают с безусловными.

Пример 8.1. Из примеров 7.3 и 7.4 следует, что для того, чтобы нормально распределенные СВ $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы диагональные элементы матрицы G были равны нулю, т.е. $q_{12} = q_{21} = 0$. Приведем аналогичное утверждение для дискретных СВ.

Теорема. Пусть $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ – СВ, каждая из которых может принимать не более, чем счетное число значений. Они являются независимыми тогда и только тогда, когда $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P\{\omega : \xi_1(\omega) = x_1,\, \xi_2(\omega) = x_2,\, \ldots,\, \xi_n(\omega) = x_n\} = \prod_{k=1}^{n} P\{\omega : \xi_k(\omega) = x_k\}.$$

Доказательство основано на следующих соотношениях. Пусть $B_1, \ldots, B_n$ – произвольные борелевские множества на прямой, тогда

$$P\{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1, \ldots, \xi_n(\omega) \in B_n\} =$$

$$= P\left\{\omega : \bigcup_{j_1}\{\xi_1(\omega) = x_1\}, \ldots, \bigcup_{j_n}\{\xi_n(\omega) = x_n\}\right\},$$

объединение здесь берется по всем элементам множеств $B_1, \ldots, B_n$ положительной вероятности. Значит,

$$P\{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1, \ldots, \xi_n(\omega) \in B_n\} =$$

$$= \sum_{j_1}\sum_{j_2}\ldots\sum_{j_n} P\{\omega : \xi_1(\omega) = x_{j_1}, \ldots, \xi_n(\omega) = x_{j_n}\} =$$

$$= \sum_{j_1}\sum_{j_2}\ldots\sum_{j_n} P\{\omega : \xi_1(\omega) = x_{j_1}\} \cdot \ldots \cdot P\{\omega : \xi_n(\omega) = x_{j_n}\} =$$

$$= \sum_{j_1} P\{\omega : \xi_1(\omega) = x_{j_1}\} \cdot \ldots \cdot \sum_{j_n} P\{\omega : \xi_n(\omega) = x_{j_n}\} =$$

$$= P\{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1, \ldots, \xi_n(\omega) \in B_n\}.$$

Пример 8.2. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, причем Ω состоит ровно из n точек, каждая из которых имеет положительную вероятность. Покажем, что на этом вероятностном пространстве не существует двух независимых СВ, каждая из которых принимает n различных значений.

Возьмем произвольное из n элементарных событий ω_1. Пусть ξ и η – произвольные СВ, определенные на этом вероятностном пространстве и принимающие n различных значений каждая. Положим $\xi(\omega_1) = a, \eta(\omega_1) = b.$ Тогда $P(\xi = a) = P(\{\omega_1\}) = P(\eta = b),$ поскольку не существует других элементарных событий, на которых СВ ξ принимала бы значение a или СВ η принимала бы значение b. Следовательно

$$P(\xi = a, \eta = b) = P(\{\omega_1\}), P(\xi = a)P(\eta = b) = P^2(\{\omega_1\}),$$

и т.к. $P(\{\omega\}) \neq P^2(\{\omega\})$, то СВ ξ и η – зависимы.

Определение. Пусть $\mathcal{B}_n$ – система борелевских множеств в R^n, $\mathcal{B}$ – система борелевских множеств на прямой R. Функция n аргументов $f(x) \in R,\ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n,$ называется борелевской (измеримой по Борелю), если $f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\} \in \mathcal{B}_n \ \ \forall\ B \in \mathcal{B}$, т.е. прообраз борелевского множества из R является борелевским множеством в R^n.

Теорема *(о суперпозиции измеримых функций).* Пусть $\xi(\omega)$ – n-мерная СВ, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $f(x)$ – борелевская функция на R^n. Тогда $\eta(\omega) = f(\xi(\omega)) = f(\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega))$ также является СВ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Доказательство. Пусть $B \in \mathcal{B}$. Т.к.

$$\{\omega : f(\xi(\omega)) \in B\} = \{\ \omega : \xi(\omega) \in f^{-1}(B)\ \} \text{ и } f^{-1}(B) \text{ –}$$

борелевское множество из R^n, то

$$\{\omega : \xi(\omega) \in f^{-1}(B)\} = \xi^{-1}\left(f^{-1}(B)\right) \in \mathcal{F},$$

т.е. $\{\omega : \eta(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, что и нужно было доказать.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k=\overline{1, m}$ – борелевские функции на R^n. Определим СВ

$$\text{ç}_k(\text{ù})=f_k(\text{î}(\text{ù}))=f_k(\text{î}_1(\text{ù}), \text{î}_2(\text{ù}), ..., \text{î}_n(\text{ù})), \; k=\overline{1, m}.$$

где $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega))$ – n-мерная СВ.

СВ $\eta(\omega)=(\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), ..., \eta_m(\omega))$ является m-мерной. Пусть $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ – ф.р. соответственно СВ $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$. Нужно выразить $F_\eta(y)$ через $F_\xi(x)$ и систему функций $f_k(x)$, $k=\overline{1, m}.$

Допустим, что ф.р. $F_\xi(x)$ – абсолютно непрерывная. Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $m=n$ и все функции $f_k(x)$, $k=\overline{1, n},$ являются дифференцируемыми и функционально независимыми, для последнего достаточно, чтобы

$$\det A=\det||a_{ik}||=\det\left\|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k}\right\|\neq 0 \;\; \forall x.$$

В данном случае будем иметь:

$$F_\eta(y)=P\{\eta_1\le y_1, ..., \; \eta_n\le y_n\}=P\left\{f_k(\xi_1, ..., \; \xi_n)\le y_k, \; k=\overline{1, n}\right\}=$$

$$=\int dx_1 \; . \;\; . \;\; . \int\limits_{\left\{f_k(x_1, ..., x_n)\le y_k, k=\overline{1, n}\right\}} p_\xi(x_1, ..., \; x_n)dx_n \, .$$

Сделаем замену переменных $f_k(x_1, ..., x_n)=z_k$, $k=\overline{1, n},$ тогда

$$x_k=q_k(z_1, ..., z_n), \; f_k[q_1(z_1, ..., z_n), ..., q_n(z_1, ..., z_n)]=$$
$$=z_k, \;\; q(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ..., x_n))=x_k, \; k=\overline{1, n},$$

и поэтому

$$F_{\text{ç}}(y)=$$

$$=\int\limits_{\left\{z_k\le y_k, k=\overline{1, n}\right\}} dq_1(z_1, ..., z_n)..\int p_{\text{î}}(q_1(z_1, ..., z_n), ..., q_n(z_1, ..., z_n))dq_n(z_1, ..., z_n)=$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{y_1} dz_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{y_n} p_{\hat{\imath}}\left(q_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, q_n(z_1, \ldots, z_n)\right) \left| \frac{\partial(q_1, \ldots, q_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \right| dz_n,$$

где $\left| \frac{\partial(q_1, \ldots, q_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \right|$ – якобиан невырожденного преобразования $x_k = q_k(z_1, \ldots, z_n)$, $k = \overline{1, n},$ т.е. определитель ($n \times n$) – матрицы G с элементами $q_{ik} = \frac{\partial q_i(z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_k}$. Таким образом, $F_\eta(y)$ также абсолютно непрерывная ф.р., и плотность распределения СВ $\eta(\omega)$ равна

$$p_\eta(y_1, \ldots, y_n) = p_\xi\left(q_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, q_n(y_1, \ldots, y_n)\right) \left| \frac{\partial(q_1, \ldots, q_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right|.$$

Данное выражение можно записать в более краткой форме:

$$p_\eta(y) = p_\xi\left(f^{-1}(y)\right) \left| \frac{\partial f^{-1}(y)}{\partial(y)} \right|.$$

где $f(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y)) = (f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n)).$

2) Пусть теперь $m < n$ и $rang \left\| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} \right\| = m \ \ \forall x$.

В этом случае систему функций $f_k(x), k = \overline{1, m},$ можно дополнить $(n - m)$ функциями $f_{m+j}(x), 1 \le j \le n - m,$ так, чтобы они были непрерывно дифференцируемы и все вместе функционально независимыми. Новая система функций определит n-мерную СВ $\overline{\eta}(\omega)$. Тогда из условия согласованности и предыдущего случая будем иметь:

$$p_{\text{ç}}(y_1, \ldots, y_m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy_{m+1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\bar{\text{ç}}}(y_1, \ldots, y_n) dy_n =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy_{m+1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\hat{\imath}}(q_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, q_n(y_1, \ldots, y_n)) \left\| \frac{\partial(q_1, \ldots, q_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right\| dy_n .$$

Пример 8.3. Пусть у нас есть двумерная СВ

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)).$$

Образуем СВ $\eta(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)$ и найдем ее плотность распределения. В данном случае $n = 2$, $m = 1$, $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = y_1$. Т.к. $m < n$, $n - m = 1$, то нужно ввести еще одну функцию, выберем $f_2(x_1, x_2) = x_2 = y_2$. Тогда обратное преобразование определяется функциями $x_1 = q_1(y_1, y_2) = y_1 - y_2,\ x_2 = q_2(y_1, y_2) = y_2.$ Поэтому

$$\left\| \frac{\partial(q_1, q_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ и } p_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y - y_2, y_2) dy_2.$$

Если $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ – независимые СВ, то

$$p_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(y - y_2) p_{\xi_2}(y_2) dy_2.$$

Эта формула известна в литературе как свертка для плотностей распределения вероятностей и обозначается $p_\eta = p_{\xi_1} * p_{\xi_2}$.

Пример 8.4. Пусть СВ $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ независимы и имеют стандартные гамма–распределения с параметрами p_1 и p_2 соответственно: $p_{\xi_i}(x) = \Gamma^{-1}(p_i) x^{p_i - 1} e^{-x},\ x \ge 0, i = 1, 2,$

где $\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция. Покажем, что СВ $\eta(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)$ имеет гамма–распределение с параметром $p_1 + p_2$.

Согласно формулы для плотности суммы независимых СВ имеем

$$p_\eta(y) = \Gamma^{-1}(p_1)\Gamma^{-1}(p_2)\int_0^y (y - y_2)^{p_1 - 1} e^{-(y - y_2)} y_2{}^{p_2 - 1} e^{-y_2} dy_2 =$$

$$= \Gamma^{-1}(p_1)\Gamma^{-1}(p_2) e^{-y} \int_0^y (y - y_2)^{p_1 - 1} y_2{}^{p_2 - 1} dy_2.$$

Верхний предел в интеграле равен y, поскольку в данном соотношении должно быть $y - y_2 > 0$. Сделав замену переменной $y = y_2 u$, получим

$$p_\eta(y) = \Gamma^{-1}(p_1)\Gamma^{-1}(p_2) y^{p_1 + p_2 - 1} e^{-y} \int_0^1 u^{p_2 - 1}(1 - u)^{p_1 - 1} du.$$

Т.к. должно выполняться условие нормировки

$$\int_0^\infty p_\xi(y) dy = 1,$$

то величина

$$c = \Gamma^{-1}(p_1)\Gamma^{-1}(p_2)\int_0^1 u^{p_2 - 1}(1 - u)^{p_1 - 1} du$$

должна быть равна $\Gamma^{-1}(p_1 + p_2)$. Отметим также попутно доказанное равенство

$$\int_0^1 u^{p_2 - 1}(1 - u)^{p_1 - 1} du = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)}.$$

Пример 8.5. Пусть $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ – независимые СВ, имеющие экспоненциальное распределение с параметром ё, т.е.

$$p_{\xi_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \ x \ge 0, \\ 0, \ x < 0. \end{cases}$$

Найдем распределение СВ $\eta_n(\omega)=\xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)+...+\xi_n(\omega)$.

Пусть $n=2$. Имеем

$$p_{\eta_2}(y)=\int_0^y \lambda e^{-\lambda(y-y_2)}\lambda e^{-\lambda y_2}dy_2=\lambda^2 e^{-\lambda y}\int_0^y dy_2=\lambda^2 y e^{-\lambda y},\ y\ge 0.$$

Предположим, что для некоторого $n\ge 1$ справедлива формула

$$p_{\eta_n}(y)=\lambda\frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda y},\ y\ge 0.$$

Докажем, что она справедлива также и для $n+1$. По той же формуле для плотности суммы двух независимых СВ $\eta_{n+1}(\omega)=\eta_n(\omega)+\xi_{n+1}(\omega)$ получаем

$$p_{\eta_{n+1}}(y)=\int_0^y \lambda\frac{[\lambda(y-y_2)]^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda(y-y_2)}\lambda e^{-\lambda y_2}dy_2=$$

$$=\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda y}\int_0^y (y-y_2)^{n-1}dy_2=\lambda\frac{(\lambda y)^n}{n!}e^{-\lambda y},\ y\ge 0.$$

Распределение с плотностью $p_{\eta_n}(y)$ называется распределением Эрланга n-го порядка.

Если СВ $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ независимы и дискретны, то формула для распределения вероятностей их суммы $\eta(\omega)=\xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)$ имеет вид

$$P_\eta(y)=P\{\omega:\xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)=y\}=$$

$$=\sum_{\{y_1,\,y_2\,:\,y_1+y_2=y\}}P\{\omega:\xi_1(\omega)=y_1,\ \xi_2(\omega)=y_2\}=$$

$$=\sum_{\{y_1,y_2:y_1+y_2=y\}}P\{\omega:\xi_1(\omega)=y_1\}P\{\omega:\xi_2(\omega)=y_2\}=$$

$$=\sum_{\{y_1,y_2:y_1+y_2=y\}}P_{\xi_1}(y_1)P_{\xi_2}(y_2)=\sum_{\{y_2\}}P_{\xi_1}(y-y_2)P_{\xi_2}(y_2).$$

Пример 8.6. Пусть СВ $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ независимы и имеют биномиальные распределения:

$$P_{\xi_1}(\ell) = C_m^{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-\ell}, \; P_{\xi_2}(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \; \ell, k = \overline{0,n}.$$

Найдем распределение вероятностей СВ $\eta(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)$:

$$P_{\eta}(k) = \sum_{i=0}^{n} C_m^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} =$$

$$= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k p^k (1-p)^{n+m-k}, k = \overline{0,n}.$$

Здесь на последнем шаге использовано тождество

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k.$$

Пример 8.7. Пусть СВ $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ независимы и имеют пуассоновские распределения с параметрами λ, μ:

$$P_{\xi_1}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; P_{\xi_2}(\ell) = \frac{\mu^{\ell}}{\ell!} e^{-\mu}, \; k, \ell = 0,1,2,...$$

Покажем, что их сумма $\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) = \eta(\omega)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda + \mu$:

$$P_{\eta}(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda} \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \mu^i \lambda^{k-i} = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)},$$

поскольку справедлива формула бинома Ньютона

$$(\mu + \lambda)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \mu^i \lambda^{k-i}.$$

Пример 8.8. Пусть имеем двумерную СВ

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \; \xi_2(\omega))$$

непрерывного типа, для которой известна плотность распределения $p_{\xi}(x_1, x_2)$. Необходимо найти $p_{\eta}(y)$, где

$$\eta(\omega) = \frac{\xi_1(\omega)}{\xi_2(\omega)}.$$

В данном случае опять $n = 2,\ m = 1$. При этом

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} = y_1$$

и введем функцию $f_2(x_1, x_2) = x_2 = y_2$. Обратное преобразование имеет вид: $x_1 = q_1(y_1, y_2) = y_1 y_2,\ x_2 = q_2(y_1, y_2) = y_2$. Якобиан этого преобразования равен

$$\left|\frac{\partial(q_1, q_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right| = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2 .$$

Поэтому $p_{\bar{\eta}}(y_1, y_2) = p_{\xi}(y_1 y_2, y_2)|y_2|$, и, таким образом

$$p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(y y_2, y_2)|y_2| dy_2 .$$

Если СВ $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы, то

$$p_{ç}(y) = \int_{0}^{\infty} |y_2| p_{\hat{\imath}_1}(y y_2) p_{\hat{\imath}_2}(y_2) dy_2 =$$

$$= \int_{0}^{\infty} y_2 p_{\hat{\imath}_1}(y y_2) p_{\hat{\imath}_2}(y_2) dy_2 - \int_{-\infty}^{0} y_2 p_{\hat{\imath}_1}(y y_2) p_{\hat{\imath}_2}(y_2) dy_2 .$$

Используя этот результат, можно найти также плотность распределения произведения СВ $\eta(\omega) = \xi_1(\omega)\xi_2(\omega)$:

$$p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}\left(y_2, \frac{y}{y_2}\right) \frac{1}{|y_2|} dy_2 ,$$

а если $\xi_1(\omega),\ \xi_2(\omega)$ независимы, то

$$p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y_2|} p_{\xi_1}(y_2) p_{\xi_2}\left(\frac{y}{y_2}\right) dy_2 .$$

Задачи

8.1. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P), где $\Omega = [0,1]$, F – σ-алгебра борелевских множеств, P – мера Лебега, заданы СВ $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$. Будут ли они независимыми, если

а) $\xi(\omega) = \omega^2,\ \eta(\omega) = 1 - \omega^2;$ б) $\xi(\omega) = \frac{1}{2},\ \eta(\omega) = \omega;$

в) $\xi(\omega) = \omega,\ \eta(\omega) = \begin{cases} 1,\ \omega \in \left[0,\ \frac{1}{4}\right], \\ 2,\ \omega \in \left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right], \\ 3,\ \omega \in \left(\frac{3}{4},\ 1\right]. \end{cases}$

8.2. Должны ли быть независимыми СВ ξ и η, если таковыми являются СВ ξ^2 и η^2?

8.3. Доказать, что СВ не зависит от самой себя тогда и только тогда, когда она с вероятностью 1 равна константе.

8.4. В задаче 7.2 ответить, будут ли СВ ξ и η независимыми.

8.5. В условиях задач 7.4, 7.5 установить, являются или нет СВ ξ_1, ξ_2, ξ_3 зависимыми.

8.6. Двумерная СВ $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ задана плотностью распределения

$$p_{\xi_1\xi_2}(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi}, \text{внутри эллипса } \dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{4} \le 1, \\ 0, \text{вне эллипса.} \end{cases}$$

Зависимы или нет СВ ξ_1 и ξ_2?

8.7. В условиях задач 7.8, 7.16, выяснить, будут ли зависимы СВ ξ_1 и ξ_2.

8.8. Случайный вектор (ξ, η) с неотрицательными компонентами имеет ф.р. $F_{\xi\eta}(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$. Являются ли зависимыми его компоненты?

8.9. Система СВ (ξ_1, ξ_2) распределена равномерно с постоянной плотностью внутри квадрата со стороной a. Написать выражения для плотностей $p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)$, $p_{\xi_1}(x_1)$, $p_{\xi_2}(x_2)$ и определить, являются ли СВ ξ_1 и ξ_2 независимыми.

8.10. Распределение СВ $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ определяется формулами

$$P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} = P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} =$$
$$= P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -1\} = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0\} = 0{,}25\,.$$

Являются ли СВ ξ_1, ξ_2 независимыми?

8.11. Двумерная СВ задана таблицей

ξ_1 ξ_2	y_1	y_2	y_3
x_1	0.15	0.12	0.09
x_2	0	0.35	0.21
x_3	0	0	0.08

Зависимы или нет СВ ξ_1 и ξ_2?

8.12. Какие условия нужно наложить на ξ, чтобы СВ ξ и $sin\,\xi$ были независимыми?

8.13. Пусть СВ ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Найти вероятность того, что действительны корни квадратного уравнения $x^2 + \xi x + \eta = 0$.

8.14. Пусть ξ и η – СВ, для которых

$$P(\xi > 0) = P(\eta > 0) = \frac{3}{4},\ \ P(\xi + \eta > 0) = \frac{1}{2}\,.$$

Доказать, что ξ и η зависимы.

8.15. Пусть ξ, η и ζ – СВ, причем ξ не зависит от η и от ζ. Верно ли, что ξ не зависит от $\eta + \zeta$?

8.16. Пусть ξ и η – независимые СВ. Доказать, что СВ $\min\{1, \xi\}$ и $\min\{1, \eta\}$ также являются независимыми.

8.17. Существуют ли такие СВ ξ и η, которые не равны с вероятностью 1 константам и: а) ξ и $\xi+\eta$ независимы, б) ξ и $\xi\eta$ независимы, в) ξ, $\xi+\eta$ и $\xi\eta$ независимы в совокупности?

8.18. СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности и имеют одно и то же показательное распределение. Найти $p_\eta(y)$ где $\eta=\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

8.19. СВ ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют стандартные нормальные плотности, т.е. $\xi_i \sim N(0, 1)$, $i=1{,}2$. СВ r и φ – полярные координаты точки с декартовыми координатами

$$(\xi_1, \xi_2): \xi_1 = r\cos\varphi,\ \xi_2 = r\sin\varphi\ .$$

Показать, что r и φ независимы.

8.20. Пусть ξ и η – независимые одинаково распределенные целочисленные СВ, $p_i = P(\xi = i)$, $i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. Доказать, что

$$P(\xi-\eta=0)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i^2 .$$

8.21. Пусть ξ и η – независимые СВ с одинаковой плотностью распределения $p(x)$. Обозначим через $q(x)$ – плотность распределения СВ $\xi-\eta$. Доказать, что

$$q(0)=\int_{-\infty}^{\infty} p^2(x)dx .$$

8.22. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – две совокупности независимых в каждой совокупности СВ. Доказать, что если

$$P(\xi_k \ge a) \ge P(\eta_k \ge a),$$

то

$$P(\xi_1+\ldots+\xi_n \ge a) \ge P(\eta_1+\ldots+\eta_n \ge a).$$

8.23. Пусть ξ и η – независимые СВ с одинаковой плотностью распределения $p(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$. Найти плотность распределения суммы $\xi+\eta$.

8.24. Найти плотность распределения суммы $\xi+\eta$ независимых СВ ξ и η, если ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,\ b]$, а η – равномерное распределение на отрезке $[c,\ d]$, $a<b,\ c<d,\ b\text{-}a\le d\text{-}c$.

8.25. Пусть $\xi_1,\dots,\ \xi_n$ – независимые одинаково распределенные СВ с плотностью $p(x)$. Доказать по индукции, что если – $p_n(x)$ плотность распределения суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$, то

$$p_n(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(x-x_1-\dots-x_{n-1})p(x_{n-1})\cdot\ldots\cdot p(x_1)dx_{n-1}\dots dx_1.$$

8.26. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые СВ, ξ_1 имеет показательное распределение с параметром λ, ξ_2 равномерно распределена на отрезке $[a,\ b]$. Найти плотность распределения СВ $\xi_1+\xi_2,\ \xi_1-\xi_2$.

8.27. Доказать, что сумма $\xi_1+\xi_2$ независимых нормально распределенных СВ ξ_1 и ξ_2 с параметрами соответственно (a_1,τ_1^2), (a_2,τ_2^2) нормально распределена с параметрами $(a_1+a_2,\tau_1^2+\tau_2^2)$.

8.28. СВ $\xi_i,\ i=\overline{1,n}$, независимы и имеют нормальное распределение с параметрами соответственно (a_i,τ_i^2). Показать, что СВ $\xi=\xi_1+\dots+\xi_n$ имеет нормальное распределение с параметрами $a=a_1+\dots+a_n$, $\tau=\tau_1^2+\dots+\tau_n^2$.

8.29. СВ $\xi_i,\ i=\overline{1,n}$, независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром $\lambda=1$. Найти плотность распределения $p_\eta(y)$, где

$$\eta=\frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}\cdot$$

8.30. Найти ф.р. произведения независимых СВ ξ_1 и ξ_2 по их ф.р. $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(x)$.

8.31. СВ ξ принимает значения $-2,\ 0,\ 2$ с вероятностями соответственно 0,25, 0,5, 0,25, а СВ η, независимая от ξ, принимает значения –1 и 1 с вероятностью 0,5. Найти распределение СВ $\xi+\eta$.

8.32. Дана последовательность $\{\xi_i\},\ i=1,2,\ldots,$ независимых СВ, которые принимают значения 0 и 1 с вероятностью 0,5. Найти распределение СВ

$$\eta=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i}{2^i}.$$

8.33. СВ ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ b]$. Найти плотности распределения СВ

$\xi+\eta$, $\xi-\eta$, $\xi\eta$, $\dfrac{\xi}{\eta}$.

8.34. Пусть СВ ξ_1 и ξ_2 независимы и каждая имеет показательное распределение с параметром ё. Показать, что:

а) СВ $\dfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$ равномерно распределена на отрезке $[0,\ 1]$,

б) СВ $\dfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$ и $\xi+\eta$ независимы.

8.35. СВ ξ_1 и ξ_2 независимы и каждая имеет нормальное распределение с параметрами $a=0$, $\sigma^2=1$. Показать, что СВ

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)$$

имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$.

8.36. Пусть СВ ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальные распределения соответственно $N\left(0, \sigma_1^2\right)$ и $N\left(0, \sigma_2^2\right)$. Показать, что СВ $\eta = \frac{\xi_1 \xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$ имеет нормальное распределение $N\left(0, \sigma^2\right)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}$.

8.37. СВ ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$, а η – дискретная СВ, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots$. Найти закон распределения их суммы $\xi + \eta$.

8.38. Студент при поездке в университет пользуется двумя автобусами; первого ему приходится ожидать не более 5 минут, второго – не более 10 минут. Считая время ожидания ξ и η автобусов независимыми случайными величинами, распределенными равномерно соответственно в интервалах $[0, 5]$ и $[0, 10]$, найти плотность распределения суммарного ожидания $\xi + \eta$.

8.39. Решить предыдущую задачу в случае, когда ξ и η распределены по показательному закону соответственно с параметрами ё и μ.

8.40. Для выполнения некоторой работы необходимо выполнить последовательно две операции. Время выполнения первой операции имеет равномерное распределение на отрезке $[1, 3]$, время t_1 выполнения второй операции t_2 – СВ, равномерно распределенная на отрезке $[2, 5]$. Найти распределение времени выполнения всей работы $t_1 + t_2$, если t_1 и t_2 – независимые СВ.

8.41. СВ ξ_i доходов фирмы за i-й рабочий день имеет гамма-распределение с параметром p_i, $i = \overline{1,n}$. Найти плотность распределения среднего дохода фирмы

$$\eta = \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$$

за один рабочий день.

8.42. Пусть ξ – случайное число изделий. Каждое изделие с вероятностью p является бракованным. Обозначим через ξ_1 число бракованных изделий, через ξ_2 – число не бракованных изделий. Показать, что СВ ξ_1 и ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда ξ имеет распределение Пуассона.

8.43. Совместное распределение

$$p_{ij} = P\{\xi_1 = a_i,\ \xi_2 = a_j\},\ i,j = \overline{1,3},$$

случайных доходов фирмы ξ_1, ξ_2 в течении двух последовательных рабочих дней задано таблицей $(a_i \in \{-1000,\ 0,\ 1000\})$:

ξ_2 / ξ_1	-1000	0	1000
-1000	0.2	0.1	0.3
0	0.1	0.2	0.2
1000	0.1	0.2	0.3

Найти:

а) одномерные распределения $p_i = P\{\xi_1 = a_i\},\ p_i = P\{\xi_2 = a_j\};$

б) распределение среднего дохода $\xi = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)$;

в) совместное распределение среднего дохода ξ и прироста дохода $\eta = \xi_2 - \xi_1$.

8.44*. Доказать, что сверка непрерывной ф.р. с любой ф.р. непрерывна.

8.45*. СВ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют стандартные нормальные плотности распределения

$$p_{\xi_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}},\ i = \overline{1,n}.$$

Показать, что СВ $n_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_i,\ j = \overline{1,n},$

где матрица $\|a_{ij}\|$ ортогональна, также независимы и распределены по стандартному нормальному закону.

8.46*. При проведении вычислений по методу Монте-Карло часто требуется последовательность независимых нормально распределенных СВ. В ЭВМ с помощью теоретико-числовых методов или с помощью физических датчиков успешно получают последовательность независимых равномерно распределенных на $[0,\ 1]$ СВ $\xi_1, ..., \xi_n, ...$. Можно показать (см. пример 6.8), что СВ $\eta_i = F^{-1}(\xi_i),$ где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

имеет нормальное распределение. Однако строить по последовательности $\{\xi_i\}$ последовательность нормально распределенных величин с помощью $F^{-1}(y)$ неудобно, т.к. выражение $F^{-1}(y)$ через элементарные функции отсутствует, а для запоминания $F^{-1}(y)$ требуется достаточно большой объем памяти. Одним из способов построения нормальных величин является следующий. Разбивают последовательность $\{\xi_i\}$ на пары и по каждой паре ξ_i, ξ_{i+1} с помощью преобразований

$$\varphi = 2\pi\xi_i;\ z = -\ln\xi_{i+1};\ \ r = \sqrt{2z};$$
$$\eta_i = r\cos\varphi;\ \ \eta_{i+1} = r\sin\varphi$$

получают последовательность независимых нормально распределенных величин. В связи с этим возникают следующие вопросы: а) доказать, что z имеет показательное распределение; б) доказать, что η_i и η_{i+1} независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0,\ 1)$.